

**Министерство образования Российской Федерации  
Российский государственный профессионально-педагогический  
университет  
Инженерно-педагогический институт  
Уральское отделение Российской академии образования  
Академия профессионального образования**

**В. П. Верещагин, Е. Н. Горелов**

**Геометрическое обоснование моделей  
однородного деформационного преобразования  
кристаллических решеток, допускающего  
инвариантную плоскость**

**Екатеринбург 2003**

УДК 539.2:514.87

ББК В37

В 31

**Верещагин В. П., Горелов Е. Н.** Геометрическое обоснование моделей однородного деформационного преобразования кристаллических решеток, допускающего инвариантную плоскость. Екатеринбург: Изд-во Рос. гос. проф.-пед.ун-та, 2003. 135 с. ISBN 5-8050-0041-5.

В монографии предлагается новый подход к изучению кристаллографии реконструктивных мартенситных превращений, для которых приемлемы представления об однородном деформационном преобразовании решеток превращающихся фаз. Подход последовательно основывается на принципах, определяющих специфику мартенситного механизма превращения и допускающих геометрическую формулировку: принципе кооперативности смещений атомов и принципе идеального сопряжения решеток превращающихся фаз. Детально обсуждается и принцип максимального сближения решеток превращающихся фаз. Для математического выражения указанных принципов разрабатывается оригинальный формализм ориентационных инвариантов однородного деформационного преобразования и преобразования размерности инвариантных подпространств, а также используется понятие меры, количественно характеризующей различие между кристаллическими решетками. Значительное внимание уделяется классическому случаю взаимного превращения фаз, имеющих гранецентрированную кубическую и объемноцентрированную кубическую (тетрагональную) решетки.

Книга предназначена для специалистов в области физики твердого тела, аспирантов и студентов физических и металлургических факультетов вузов.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (грант Е02–3.4–340).

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Пушин (Институт физики металлов УРО РАН); кандидат физико-математических наук, доцент В. В. Бухаленков (Российский государственный профессионально-педагогический университет)

ISBN 5-8050-0041-5

© Российский государственный  
профессионально-педагогический  
университет, 2003

© Верещагин В. П., Горелов Е. Н., 2003

## Оглавление

Введение .....	5
Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ ЧАСТИ ОДНОРОДНОГО ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК .....	7
1. Задача о деформационном преобразовании решеток. Подходы к ее решению .....	7
2. Преобразование $\alpha$ -решетки в $\gamma$ -решетку .....	12
3. Ориентационное соответствие решеток $\alpha$ и $\gamma$ , связанных собственно деформацией .....	16
4. Преобразование $\gamma$ -решетки в $\alpha$ -решетку .....	19
Заключение к главе .....	21
Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГО- НАЛЬНОЙ ЧАСТИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИ- СТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК .....	22
1. Свойства близости решеток, связанных собственно деформацией ....	22
2. Деформация с инвариантной плоскостью .....	25
3. Представление ориентационно неизменных плоскостей .....	30
4. Вырождение собственных значений и размерность инвариантных подпространств .....	34
5. Преобразование одномерного инвариантного подпространства в двухмерное. Дополнительная деформация .....	38
Заключительные замечания .....	42
Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ ДЕФОРМАЦИОН- НОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИОННО НЕИЗМЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ .....	43
1. Связь собственных значений тензора $L$ с параметрами ортогональ- ного преобразования $\Omega$ .....	43
2. Параметры ортогонального преобразования при дополнительных ограничениях на детерминант собственно деформации .....	44
3. Связь между параметрами ортогонального преобразования и харак- теристическими составляющими собственно деформации .....	46
4. Построение ориентационно неизменных плоскостей .....	52
5. Ориентационно неизменные плоскости в случае двукратного выро- ждения собственных значений тензора $E$ .....	55
Заключение к главе .....	64

Глава 4. ОРИЕНТАЦИОННО НЕИЗМЕННЫЕ ПЛОСКОСТИ В СЛУЧАЕ $\gamma \rightarrow \alpha$ ПЕРЕСТРОЙКИ ПРИ СОБСТВЕННО ДЕФОРМАЦИИ $\gamma$ -РЕШЕТКИ ПО БЕЙНУ .....	65
1. Ограничения на параметры собственно деформации и ориентацию плоскостей $P_3$ .....	65
2. Ориентационное поведение плоскостей $P_3$ , ориентационно близких к заданной плоскости при условии $(N_3, [N, e_3]) = 0$ .....	69
3. Ориентационное поведение плоскостей $P_3$ , ориентационно близких к заданной плоскости при условии $(N_3, [N, e_3]) \neq 0$ .....	73
4. Пересечение множеств допустимых значений параметра $\sigma_3$ .....	82
5. Ориентационно эквивалентные плоскости $P_3(H)$ .....	95
Заключенис к главас .....	99
Глава 5. ОПИСАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО $\gamma \rightarrow \alpha$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕТОК. ОРИЕНТАЦИОННОЕ СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕТОК $\alpha$ И $\gamma$ .....	100
1. Область допустимых значений параметров деформации Бейна .....	100
2. Составляющие однородного деформационного преобразования решетки $\gamma$ в решетку $\alpha$ .....	111
3. Область изменения переменных $\delta\phi$ , $\sigma_3$ , $\tau$ .....	113
4. Ориентационное соответствие решеток $\alpha$ и $\gamma$ .....	121
Заключительные замечания .....	127
Заключение .....	129
Библиографический список .....	132

## Введение

Методы создания конструкционных материалов основываются на использовании закономерных связей между физико-химическими свойствами металлов и сплавов и их внутренним строением. Одним из основных средств, позволяющих на практике перестраивать структуру металлов и сплавов, служат фазовые превращения. Последние заключаются нередко в изменении кристаллической структуры, характерной чертой которого является кооперативность перестройки кристаллической решетки. Классическим примером превращения такого типа служит  $\gamma - \alpha$  мартенситное превращение (МП) в сплавах железа<sup>1</sup>. Изучение именно этого превращения привело к осознанию специфики бездиффузионных структурных переходов и положило начало развитию представлений об особом, мартенситном, механизме перехода [1], который, как выяснилось, вообще типичен для превращений кристаллической структуры в условиях подавления диффузионных процессов. Последнее обстоятельство позволяет оправдать интерес к мартенситной проблематике со стороны не только прикладной, но и фундаментальной науки и служит важнейшим стимулом для развития теории  $\gamma - \alpha$  МП в сплавах железа.

Одно из направлений развития теории  $\gamma - \alpha$  МП связано с изучением закономерностей механизма превращения, проявляющих себя в кристаллографии и морфологии мартенситной фазы. Теория кристаллографии мартенсита основывается на постулате о локальном соответствии решеток, следующем из экспериментально установленных фактов существования ориентационного соответствия между решетками превращающихся фаз и макроскопического изменения формы, превращающейся области аусте-

---

<sup>1</sup> В случае  $\gamma - \alpha$  МП высокотемпературная фаза, именуемая аустенитом, имеет гранецентрированную кубическую (ГЦК) решетку, обозначаемую сокращенно  $\gamma$ . Под термином «мартенсит» подразумевается структурная составляющая, которая возникает бездиффузионно при охлаждении сплава и имеет либо объемноцентрированную кубическую (ОЦК) решетку, либо объемноцентрированную тетрагональную (ОЦТ) решетку; и та и другая обозначается сокращенно  $\alpha$ . ОЦТ решетка типична для сплавов внедрения (Fe-C, Fe-N), причем величина тетрагональности растет с ростом концентрации внедренного компонента. Для мартенсита сплавов замещения (Fe-Ni, Fe-Mn) более характерна ОЦК решетка. Основные черты  $\gamma - \alpha$  МП в сплавах железа, особенности предмартенситного состояния и ретроспектива исследований отражены во многих публикациях [1–14].

нита [15]. Перестройка кристаллической решетки в пределах областей, в которых соответствие решеток выполняется, эквивалентна однородной деформации, преобразующей одну решетку в другую; изменение формы, связанное с превращением, также является однородной деформацией, при которой габитусная плоскость кристалла мартенсита<sup>1</sup> не искажается и не поворачивается. Геометрия конечной однородной деформации представляет значительный интерес при рассмотрении кристаллографии мартенсита. К кристаллографическим характеристикам превращения относят ориентационные соотношения между решетками исходной и конечной фаз, габитусную плоскость мартенситной пластины и характер макроскопического изменения формы области, испытавшей превращение. Задача теории состоит в том, чтобы объяснить все эти характеристики, зная кристаллическую структуру превращающихся фаз и параметры их решеток.

Разработке кристаллографической теории мартенситных превращений посвящено множество исследований. Достаточно полную картину о развитии представлений, составивших фундамент теории, можно получить, например, из ряда работ [10 – 12]. Что же касается состояния теории в целом, то его нельзя признать удовлетворительным. Об этом свидетельствуют трудности теории: неспособность ее объяснить с единой точки зрения детали отдельных превращений, малоубедительных гипотез, устраняющих расхождение предсказаний теории с экспериментом, и как следствие – неконструктивность теории при построении конкретных моделей превращения, а также трактовке связи между морфологическими характеристиками отдельного кристалла мартенсита и процессом его образования, проходящим через стадии зарождения и роста. В подобной ситуации оправданной представляется постановка задачи, включающей в себя критический анализ и пересмотр фундамента существующей кристаллографической теории в сочетании с разработкой нового подхода к изучению кристаллографии превращения, в рамках которого все свойства деформационного преобразования одной решетки в другую, включая и возможность преобразования посредством деформации с инвариантной плоскостью, рассматриваются последовательно с геометрической точки зрения, учитывающей только взаимное расположение узлов в решетках, связанных преобразованием. Решение этой задачи и является целью настоящей работы.

---

<sup>1</sup> Наиболее типичной структурной формой мартенситной фазы является пластина с малым отношением толщины к другим линейным размерам. Габитусная плоскость пластины – это ее плоские грани или средняя плоскость, если грани сильно изрезаны.

# **Глава 1. ПОСТРОЕНИЕ СИММЕТРИЧНОЙ ЧАСТИ ОДНОРОДНОГО ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК**

Рассматривается задача об однородном деформационном преобразовании кристаллических решеток в геометрической постановке, предполагающей учет только взаимного расположения узлов в решетках превращающихся фаз и использование определения мартенситного механизма превращения фаз по Г. В. Курдюмову. Устанавливаются все варианты деформационного преобразования, ответственного за изменение расположения узлов, характерного для одной решетки, в расположение узлов, характерное для другой решетки, т. е. за собственно деформацию одной решетки в другую в случае взаимного превращения фаз, имеющих ГЦК и ОЦК (ОЦТ) решетки.

## **1. Задача о деформационном преобразовании решеток.**

### **Подходы к ее решению**

Следуя основному положению кристаллографической теории мартенситных превращений, рассмотрим перестройку одной кристаллической решетки (обозначим ее  $X$ ) в другую решетку (обозначим ее  $\gamma$ ) путем однородной деформации. Такая деформация описывается преобразованием

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}\mathbf{X}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{r}$  – радиус-векторы, определяющие положение одного и того же узла в решетках  $X$  и  $\gamma$  относительно узла решетки  $X$ , принятого за начало  $O$ . Решетка  $X$  считается известной, т. е. векторы основных трансляций, определяющие решетку  $X$ , предполагаются заданными. Известным считается и взаимное расположение узлов в решетке  $\gamma$ . Задача состоит в том, чтобы найти тензор  $\mathbf{L}$ , отображающий решетку  $X$  в решетку  $\gamma$ . Обсудим некоторые подходы к ее решению.

Пусть в решетке  $X$  выбрана какая-либо тройка узлов 1, 2, 3, не лежащих на одной прямой, и пусть их положение в решетке  $X$  определяется радиус-векторами  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ , а в решетке  $\gamma$  – радиус-векторами  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ . Тогда соответствие между этими радиус-векторами можно выразить, следуя (1.1), уравнениями:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{L}\mathbf{X}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Разрешая уравнение (1.2) относительно  $L$ , получим

$$L = \sum_{i=1}^3 r_i \cdot X^i, \quad (1.3)$$

где<sup>1</sup>

$$X^1 = [X_2, X_3]/V, \quad X^2 = [X_3, X_1]/V, \quad X^3 = [X_1, X_2]/V, \quad (1.4)$$

$$V = (X_1, [X_2, X_3]).$$

Формула (1.3) решает задачу нахождения тензора  $L$ , если заданы радиус-векторы  $r_1, r_2, r_3$ . Последнее предполагает однако интуитивный выбор какой-либо конкретной схемы перестройки решетки  $X$  в решетку  $r$ , такой, например, как схема перестройки  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку, на которую впервые указал Бейн [16]. Схеме Бейна соответствуют следующие тройки радиус-векторов:

$$X_1 = (a_\gamma / \sqrt{2}) e_1, \quad X_2 = (a_\gamma / \sqrt{2}) e_2, \quad X_3 = a_\gamma e_3, \quad (1.5)$$

$$r_1 = a_\alpha e_1, \quad r_2 = a_\alpha e_2, \quad r_3 = c_\alpha e_3,$$

где  $a_\gamma$  – параметр  $\gamma$ -решетки,  $a_\alpha, c_\alpha$  – параметры  $\alpha$ -решетки;  $e_1, e_2, e_3$  – правая тройка взаимно перпендикулярных ортов ( $e_1$  и  $e_2$  направлены в  $\gamma$ -решетке вдоль осей симметрии второго порядка, а  $e_3$  – вдоль оси симметрии четвертого порядка). Тогда

$$X^1 = (\sqrt{2}/a_\gamma) e_1, \quad X^2 = (\sqrt{2}/a_\gamma) e_2, \quad X^3 = (1/a_\gamma) e_3$$

и тензор  $L$  принимает вид

$$L = (a_\alpha \sqrt{2}/a_\gamma)(e_1 \cdot e_1 + e_2 \cdot e_2) + (c_\alpha/a_\gamma)e_3 \cdot e_3. \quad (1.6)$$

Векторы (1.5) определяют в  $\gamma$ -решетке объемноцентрированную тетрагональную ячейку  $OABCO'A'B'C'$  (рис. 1.1), которая растягиваясь в направлениях  $e_1, e_2$  в  $a_\alpha \sqrt{2}/a_\gamma$  раз и сжимаясь в направлении  $e_3$  в  $c_\alpha/a_\gamma$  раз, преобразуется в ячейку Браве ОЦК-решетки, если  $c_\alpha = a_\alpha$ , и в ячейку Браве ОЦТ-решетки, если  $c_\alpha > a_\alpha$ . Такая деформация  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -ре-

---

<sup>1</sup> Символы  $a \cdot b$ ,  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ , используемые в тексте, означают соответственно тензорное, векторное, скалярное произведение векторов; действие тензора  $a \cdot b$  на вектор  $c$  определяется правилом  $a \cdot b \cdot c = a(b, c)$ .



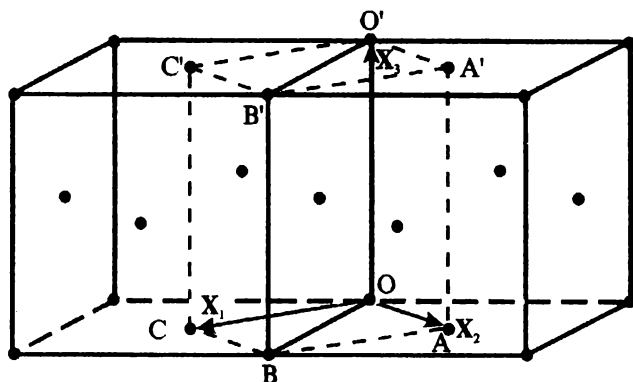


Рис. 1.1. Сдвоенная элементарная ячейка в  $\gamma$ -решетке с выделенной ОЦТ ячейкой  $OABCO'A'B'C'$

сетку требует минимальных смещений атомов (из-за близости ячеек, связанных преобразованием) и, следовательно, отвечает условию<sup>1</sup>  $Sp(L^* L) = \min$ , (звездочка при символе тензора означает транспонирование). Она называется деформацией Бейна.

Подход, основанный на использовании схем, позволяющих реализовать деформационную перестройку одной решетки в другую, не является удовлетворительным по крайней мере в двух отношениях: во-первых, из-за отсутствия универсального рецепта неясно, как искать такие схемы в каждом конкретном случае; во-вторых, никакая заданная схема перестройки одной решетки в другую не решает вопрос о перечислении всех вообще вариантов перестройки, которые отвечали бы определению мартенситного механизма превращения<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> В случае симметричного тензора  $L$  это условие выражает принцип минимальной деформации.

<sup>2</sup> Эти замечания относятся только к реконструктивным МП, при которых группы симметрии решеток превращающихся фаз не связаны одна с другой как группа и подгруппа, а сами фазы не теряют механической устойчивости (отсутствуют аномалии в поведении упругих свойств и фононном спектре) к началу превращения. Что же касается дисторсионных МП, то для них разработаны эффективные методы [17], позволяющие анализировать с единой точки зрения все допускаемые симметрией структурные переходы в кристаллах произвольной сложности. Достаточно хорошо разработаны и основы динамической теории дисторсионных МП [18], [19], связывающей структурный переход с конденсацией критических фононов, возможной в условиях термодинамического равновесия, если исходная фаза теряет механическую устойчивость относительно определенных смещений атомов (концепция «мягкой» моды Гинзбурга – Кокрена – Андерсона [20 – 22]).

Предположим теперь, что ориентация радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  относительно радиус-векторов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$  не задана, но известны значения  $g_{ik}$  скалярных произведений

$$g_{ik} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

т. е. известны длины радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  и углы между ними. В этом случае тензор  $\mathbf{L}$  не определяется однозначно. Действительно, из уравнений (1.7) после преобразований

$$\begin{aligned} g_{ik} &= (\mathbf{L}\mathbf{X}_i, \mathbf{L}\mathbf{X}_k) = (\mathbf{X}_i, \mathbf{L}^* \mathbf{L}\mathbf{X}_k), \\ \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}^i g_{ik} &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}^i (\mathbf{X}_i, \mathbf{L}^* \mathbf{L}\mathbf{X}_k) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}_i \mathbf{L}^* \mathbf{L}\mathbf{X}_k = \mathbf{L}^* \mathbf{L}\mathbf{X}_k, \\ \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}^k &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{L}^* \mathbf{L}\mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}^k = \mathbf{L}^* \mathbf{L} \sum_{k=1}^3 \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}^k = \mathbf{L}^* \mathbf{L} \end{aligned}$$

с использованием уравнений (1.2) и тождеств

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}^i = \mathbf{I},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, получим уравнение

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}^k, \quad (1.8)$$

где  $\mathbf{E}^2 = \mathbf{L}^* \mathbf{L}$ , что позволяет найти при известных  $g_{ik}$  только симметричную часть  $\mathbf{E} = \sqrt{\mathbf{L}^* \mathbf{L}}$  тензора  $\mathbf{L}$ . Сам же тензор  $\mathbf{L}$  определяется при заданном  $\mathbf{E}$  с точностью до ортогонального преобразования  $\Omega$ :

$$\mathbf{L} = \Omega \mathbf{E}, \quad (1.9)$$

согласно теореме о разложении в произведение тензора второго ранга [23], где преобразование  $\Omega$ , будучи вращением<sup>1</sup> вокруг оси, проходящей через начало  $O$ , ответственно за ориентацию тройки радиус-векторов  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  относительно тройки радиус-векторов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3$ .

---

<sup>1</sup> На это указывает равенство  $\det \Omega = 1$ , в справедливости которого легко убедиться, замечая, что значение  $(-1)$ , возможное для детерминанта ортогонального преобразования второго рода, несовместимо с соотношениями  $\det \mathbf{L} > 0$ ,  $\det \mathbf{E} > 0$ ,  $\det \mathbf{L} = \det \Omega \det \mathbf{E}$ , следующими из непрерывности преобразования (1.1), определения корня квадратного из симметричного тензора  $\mathbf{L}^* \mathbf{L}$ , равенства (1.9) и теоремы о детерминанте произведения тензоров.

Если отказаться от использования схем деформационной перестройки решетки  $X$  в решетку  $\Gamma$ , то коэффициенты  $g_{ik}$  в (1.8) следует рассматривать как величины, которые сами подлежат определению. Уравнения, необходимые для этого, можно получить, допуская в соответствии с представлениями<sup>1</sup> о мартенситном механизме превращения, что ближайшее окружение узла  $O$  в одной решетке образовано узлами, составляющими ближайшее окружение узла  $O$  в другой решетке.

Пусть положение этих узлов в решетке  $X$  задается радиус-векторами  $X_1, X_2, \dots, X_\sigma$ , а в решетке  $\Gamma$  – радиус-векторами  $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}, \dots, \Gamma_{s_m}$  и пусть  $\sigma \leq s_m$ <sup>2</sup>. Радиус-векторы  $X_1, X_2, X_3$  можно выбрать всегда не лежащими в одной плоскости и выразить все остальные в виде

$$X_\lambda = \sum_{i=1}^3 (X_\lambda, X^i) X_i, \quad \lambda = 4, 5, \dots, \sigma, \quad (1.10)$$

где  $X^i$  определяются формулами (1.4). При деформационной перестройке (1.1) решетки  $X$  в решетку  $\Gamma$  радиус-векторы (1.10) преобразуются в радиус-векторы  $\Gamma_\lambda$ , где

$$\Gamma_\lambda = L X_\lambda = \sum_{i=1}^3 (X_\lambda, X^i) L X_i = \sum_{i=1}^3 (X_\lambda, X^i) \Gamma_i \quad (1.11)$$

принадлежат набору радиус-векторов  $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}, \dots, \Gamma_{s_m}$ . Длины радиус-векторов  $\Gamma_{s_1}, \Gamma_{s_2}, \dots, \Gamma_{s_m}$  и углы между ними известны, так как взаимное расположение узлов в решетке  $\Gamma$  предполагается заданным. Поэтому, образуя скалярные произведения векторов (1.11), придем к уравнениям

$$(\Gamma_\lambda, \Gamma_{\lambda'}) = \sum_{i,k=1}^3 (X_\lambda, X^i)(X_{\lambda'}, X^k) g_{ik}, \quad (1.12)$$

где  $\lambda, \lambda' = 4, 5, \dots, \sigma$ , относительно коэффициентов  $g_{ik}$ .

<sup>1</sup> По Г. В. Курдюмову для мартенситного механизма превращения характерны взаимная согласованность (кооперативность) в перемещениях атомов и ограничения на эти перемещения, выражаемые условием: относительные перемещения соседних атомов не превышают по величине межатомных расстояний.

<sup>2</sup> Соглашение это не ограничивает общности рассуждений, так как за решетку  $X$  можно принять любую из двух решеток, связанных однородной деформацией.

Уравнения (1.12) могут иметь несколько различных решений –  $g_{ik}^{(v)}$ ,  $i, k = 1, 2, 3, v = 1, 2, \dots$ . Столько же решений будет иметь и уравнение (1.8):

$$\mathbf{E}^{(v)} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^3 g_{ik}^{(v)} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}^k}, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (1.13)$$

Решения эти исчерпывают множество всех симметричных тензоров, ответственных за изменение расположения узлов, характерного для одной решетки, в расположение, характерное для другой решетки, т. е. за собственно деформацию одной решетки в другую, при дополнительном ограничении на изменение расположения ближайших соседей, принятом выше. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о построении тензоров (1.13) в случае решеток  $\gamma$  и  $\alpha$ .

## 2. Преобразование $\alpha$ -решетки в $\gamma$ -решетку

В  $\alpha$ -решетке узел  $O$  имеет восемь ближайших соседей (рис. 1.2), а в  $\gamma$ -решетке – двенадцать (рис. 1.3), поэтому с решеткой  $X$  следует отождествить решетку  $\alpha$ . Положения узлов, ближайших к узлу  $O$  в  $\alpha$ -решетке, зададим радиус-векторами  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_8$ . Первые три из них определяются формулами:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= \frac{a_\alpha}{2} (-\mathbf{e}_1^\alpha + \mathbf{e}_2^\alpha) + \frac{c_\alpha}{2} \mathbf{e}_3^\alpha = \frac{a_\alpha}{2} [\bar{1} \ 1 \ \tau]_\alpha, \\ \mathbf{X}_2 &= \frac{a_\alpha}{2} (\mathbf{e}_1^\alpha - \mathbf{e}_2^\alpha) + \frac{c_\alpha}{2} \mathbf{e}_3^\alpha = \frac{a_\alpha}{2} [1 \ \bar{1} \ \tau]_\alpha, \\ \mathbf{X}_3 &= \frac{a_\alpha}{2} (\mathbf{e}_1^\alpha + \mathbf{e}_2^\alpha) - \frac{c_\alpha}{2} \mathbf{e}_3^\alpha = \frac{a_\alpha}{2} [1 \ 1 \ \bar{\tau}]_\alpha, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{e}_1^\alpha, \mathbf{e}_2^\alpha, \mathbf{e}_3^\alpha$  – правая тройка взаимно перпендикулярных ортов, направленных так, как показано на рис. 1.2,  $\tau = c_\alpha / a_\alpha$  – параметр тетрагональности.

Остальные радиус-векторы выражаются через (1.14) в виде

$$\mathbf{X}_4 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i, \quad \mathbf{X}_5 = -\mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}_6 = -\mathbf{X}_2, \quad \mathbf{X}_7 = -\mathbf{X}_3, \quad \mathbf{X}_8 = -\sum_{i=1}^3 \mathbf{X}_i. \quad (1.15)$$

При  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройке радиус-векторы (1.15) преобразуются в радиус-векторы

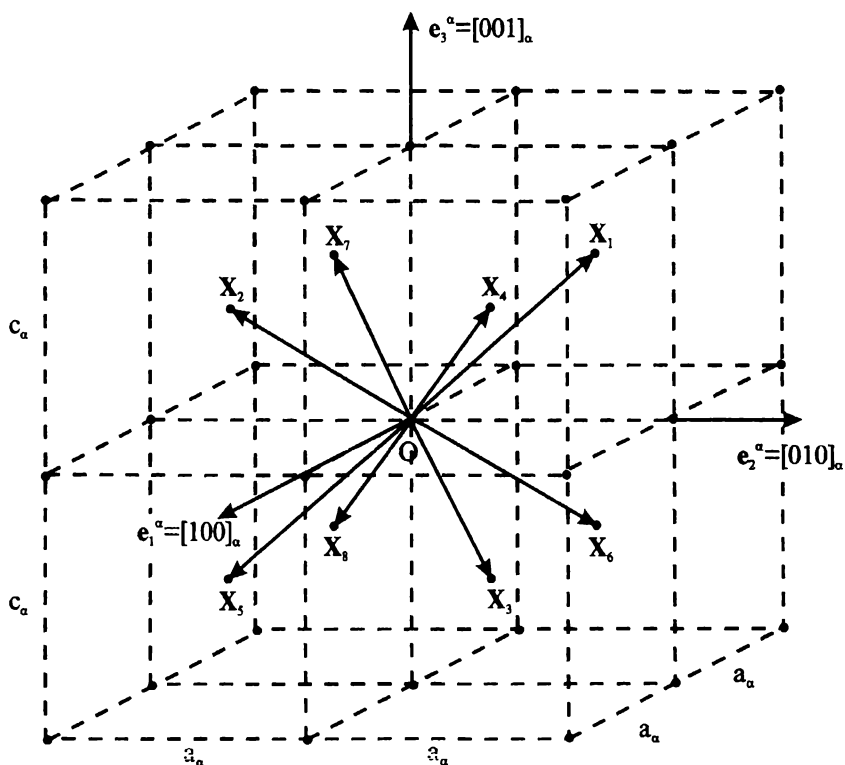


Рис. 1.2. Расположение узлов в  $\alpha$ -решетке

$$\mathbf{r}_4 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i, \quad \mathbf{r}_5 = -\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_6 = -\mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_7 = -\mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_8 = -\sum_{i=1}^3 \mathbf{r}_i, \quad (1.16)$$

принадлежащие набору радиус-векторов, определяющих положения узлов, ближайших к узлу О в  $\gamma$ -решетке (см. рис. 1.3). Радиус-векторы эти можно задать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{s_1} &= \frac{a_\gamma}{2} (\mathbf{e}_2^\gamma + \mathbf{e}_3^\gamma) = \frac{a_\gamma}{2} [011]_\gamma, & \mathbf{r}_{s_2} &= \frac{a_\gamma}{2} (\mathbf{e}_1^\gamma + \mathbf{e}_3^\gamma) = \frac{a_\gamma}{2} [101]_\gamma, \\ \mathbf{r}_{s_3} &= \frac{a_\gamma}{2} (\mathbf{e}_1^\gamma + \mathbf{e}_2^\gamma) = \frac{a_\gamma}{2} [110]_\gamma, \end{aligned} \quad (1.17a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{s_4} &= \mathbf{r}_{s_1} - \mathbf{r}_{s_2}, \quad \mathbf{r}_{s_5} = \mathbf{r}_{s_1} - \mathbf{r}_{s_3}, \quad \mathbf{r}_{s_6} = \mathbf{r}_{s_2} - \mathbf{r}_{s_1}, \quad \mathbf{r}_{s_7} = -\mathbf{r}_{s_1}, \\ \mathbf{r}_{s_8} &= -\mathbf{r}_{s_2}, \quad \mathbf{r}_{s_9} = -\mathbf{r}_{s_3}, \quad \mathbf{r}_{s_{10}} = -\mathbf{r}_{s_4}, \quad \mathbf{r}_{s_{11}} = -\mathbf{r}_{s_5}, \quad \mathbf{r}_{s_{12}} = -\mathbf{r}_{s_6}, \end{aligned} \quad (1.176)$$

где  $\mathbf{e}_1^y, \mathbf{e}_2^y, \mathbf{e}_3^y$  – правая тройка ортов, направленных вдоль осей симметрии четвертого порядка  $\gamma$ -решетки (см. рис. 1.3).

Уравнения относительно коэффициентов  $g_{ik} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$ , где  $i, k = 1, 2, 3$ , находим, перемножая скалярно радиус-векторы (1.16):

$$|\mathbf{r}_5|^2 = g_{11}, \quad |\mathbf{r}_6|^2 = g_{22}, \quad |\mathbf{r}_7|^2 = g_{33}, \quad |\mathbf{r}_4|^2 = |\mathbf{r}_8|^2 = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik}, \quad (1.18)$$

$$(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_\lambda) = -\sum_{i=1}^3 g_{i\lambda-4}, \quad \lambda = 5, 6, 7, \quad (\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_6) = g_{12}, \quad (\mathbf{r}_5, \mathbf{r}_7) = g_{13}, \quad (\mathbf{r}_6, \mathbf{r}_7) = g_{23}.$$

Радиус-векторы (1.17) имеют одинаковую длину, равную  $a_\gamma/\sqrt{2}$ . Ту же длину имеют и радиус-векторы (1.16). Учитывая это, из уравнений (1.18) получим

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = a_\gamma^2/2, \quad (1.19a)$$

$$g_{12} + g_{13} + g_{23} = -a_\gamma^2/2. \quad (1.19b)$$

Коэффициенты  $g_{ik}$ , где  $i \neq k$ , могут принимать только следующие значения:  $0, \pm a_\gamma^2/4$ , в чем нетрудно убедиться, перемножая скалярно неколлинеарные радиус-векторы из набора (1.17). Тогда уравнение (1.19b) имеет три решения:

$$\begin{aligned} g_{12}^{(1)} &= -a_\gamma^2/4, & g_{13}^{(1)} &= -a_\gamma^2/4, & g_{23}^{(1)} &= 0; \\ g_{12}^{(2)} &= -a_\gamma^2/4, & g_{13}^{(2)} &= 0, & g_{23}^{(2)} &= -a_\gamma^2/4; \\ g_{12}^{(3)} &= 0, & g_{13}^{(3)} &= -a_\gamma^2/4, & g_{23}^{(3)} &= -a_\gamma^2/4; \end{aligned} \quad (1.20)$$

которым соответствуют три решения уравнения

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} \mathbf{X}^i \cdot \mathbf{X}^k, \quad (1.21)$$

где

$$\mathbf{X}^1 = (\mathbf{e}_2^a + \tau^{-1} \mathbf{e}_3^a)/a_a, \quad \mathbf{X}^2 = (\mathbf{e}_1^a + \tau^{-1} \mathbf{e}_3^a)/a_a, \quad \mathbf{X}^3 = (\mathbf{e}_1^a + \mathbf{e}_2^a)/a_a. \quad (1.22)$$

Тензор  $\mathbf{E}^2$ , определяемый уравнением (1.21), имеет собственные векторы  $\mathbf{e}_1^a, \mathbf{e}_2^a, \mathbf{e}_3^a$ , которым соответствуют собственные значения:

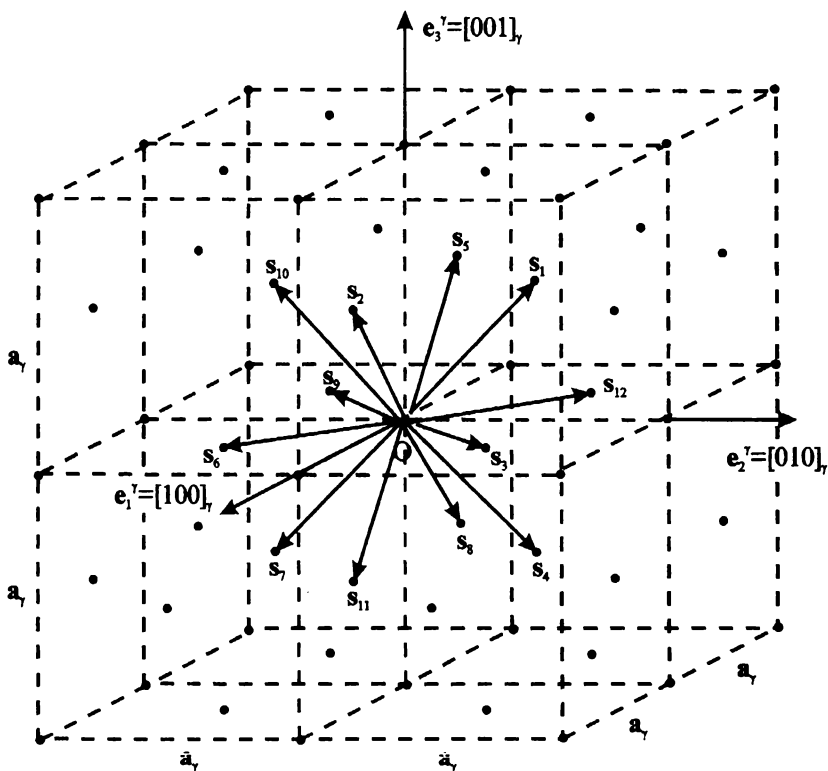


Рис. 1.3. Расположение узлов в  $\gamma$ -решетке

$$E_1^2 = (a_\gamma / a_\alpha)^2 [1 + 2(g_{23} / a_\gamma^2)], \quad E_2^2 = (a_\gamma / a_\alpha)^2 [1 + 2(g_{13} / a_\gamma^2)],$$

$$E_3^2 = (\tau^{-1} a_\gamma / a_\alpha)^2 [1 + 2(g_{12} / a_\gamma^2)],$$

в чем нетрудно убедиться путем непосредственной проверки, учитывая уравнения (1.19) и формулы (1.22). Это обстоятельство позволяет перейти от уравнения (1.21) к уравнению

$$\mathbf{E}^2 = \sum_{i=1}^3 E_i^2 \mathbf{e}_i^\alpha \cdot \mathbf{e}_i^\alpha,$$

которое можно разрешить относительно  $\mathbf{E}$  в явном виде для каждого набора значений (1.20) коэффициентов  $g_{12}$ ,  $g_{13}$ ,  $g_{23}$ :

$$\mathbf{E}^{(v)} = \sum_{i=1}^3 E_i^{(v)} \mathbf{e}_i^\alpha \cdot \mathbf{e}_i^\alpha, \quad v=1,2,3, \quad (1.23)$$

где  $E_1^{(v)}$ ,  $E_2^{(v)}$  и  $E_3^{(v)}$  – собственные значения тензора  $\mathbf{E}^{(v)}$ .

$$\begin{aligned} E_1^{(v)} &= \kappa^{-1} \sqrt{1 + 2(g_{23}^{(v)} / a_\gamma^2)}, \quad E_2^{(v)} = \kappa^{-1} \sqrt{1 + 2(g_{13}^{(v)} / a_\gamma^2)}, \\ E_3^{(v)} &= \tau^{-1} \kappa^{-1} \sqrt{1 + 2(g_{12}^{(v)} / a_\gamma^2)}, \end{aligned}$$

где  $\kappa = a_\alpha / a_\gamma$ ,  $\tau = c_\alpha / a_\alpha$ . (1.24)

Существование трех решений уравнения (1.21), выражаемых формулами (1.23), свидетельствует о том, что собственно деформация решетки  $\alpha$  в решетку  $\gamma$  реализуема тремя способами. Различие между ними проявляется при сравнении взаимной ориентации исходной и преобразованных решеток.

### 3. Ориентационное соответствие решеток $\alpha$ и $\gamma$ , связанных собственно деформацией

Тензор

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} \mathbf{e}_1^\alpha \cdot \mathbf{e}_1^\alpha + \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \mathbf{e}_2^\alpha \cdot \mathbf{e}_2^\alpha + \frac{1}{\kappa\tau\sqrt{2}} \mathbf{e}_3^\alpha \cdot \mathbf{e}_3^\alpha \quad (1.25)$$

из набора тензоров (1.23) преобразует ОЦТ ячейку Браве  $\alpha$ -решетки, построенную на векторах

$$a_\alpha \mathbf{e}_1^\alpha, \quad a_\alpha \mathbf{e}_2^\alpha, \quad c_\alpha \mathbf{e}_3^\alpha, \quad (1.26)$$

в ОЦТ ячейку OABCO'A'B'C'  $\gamma$ -решетки, вытянутую вдоль  $\mathbf{e}_1^\alpha$  (рис. 1.4). Длинное ребро  $OO'$  такой ячейки в  $\gamma$ -решетке направлено вдоль оси симметрии четвертого порядка, а короткие  $OA$ ,  $OC$  вдоль осей симметрии второго порядка (см. рис. 1.1). Условимся задавать ориентацию этих осей с помощью правой тройки ортов

$$\mathbf{e}_1 = \sqrt{6}[\mathbf{V}, [\mathbf{N}_0, \mathbf{V}]]/2, \quad \mathbf{e}_2 = \sqrt{6}[\mathbf{V}, \mathbf{N}_0]/2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{V}, \quad (1.27)$$

где орт  $\mathbf{V}$  выбирается произвольным образом из семейства ортов  $\{\pm \mathbf{e}_i^\gamma\} \equiv \langle 100 \rangle_\gamma$ , направленных вдоль осей симметрии четвертого порядка,



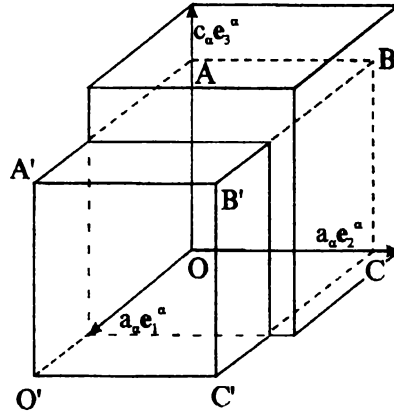


Рис. 1.4. Преобразование (1.25) ОЦТ ячейки Браве  $\alpha$ -решетки

а орт  $N_0$  – из семейства ортов  $\{(\pm e_i^j \pm e_k^j \pm e_l^j)/\sqrt{3}\} \equiv \langle 111 \rangle_j / \sqrt{3}$ ,  $i \neq k \neq j$ , направленных вдоль осей симметрии третьего порядка. Тогда ориентационное соответствие между  $\alpha$ -решеткой и  $\gamma$ -решеткой, полученной из  $\alpha$ -решетки путем деформации с тензором (1.25), можно выразить в обобщенной форме соотношениями:

$$e_1^\alpha = e_3, \quad e_2^\alpha = e_1, \quad e_3^\alpha = e_2. \quad (1.28)$$

В базисе (1.27), связанном с  $\gamma$ -решеткой, тензор (1.25) принимает вид

$$E^{(1)} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} e_1 \cdot e_1 + \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} e_2 \cdot e_2 + \frac{1}{\kappa} e_3 \cdot e_3. \quad (1.29)$$

Тензор

$$E^{(2)} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} e_1^\alpha \cdot e_1^\alpha + \frac{1}{\kappa} e_2^\alpha \cdot e_2^\alpha + \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} e_3^\alpha \cdot e_3^\alpha \quad (1.30)$$

преобразует ячейку Браве  $\alpha$ -решетки, построенной на векторах (1.26), в ОЦТ ячейку OABCO'A'B'C' (рис. 1.5), вытянутую вдоль  $e_2^\alpha$ . Поэтому ориентационное соответствие между решетками  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанными преобразованием (1.30), будет выражаться соотношениями:

$$e_1^\alpha = e_2, \quad e_2^\alpha = e_3, \quad e_3^\alpha = e_1. \quad (1.31)$$

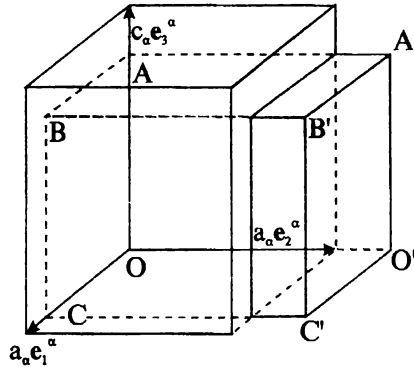


Рис. 1.5. Преобразование (1.30) ОЦТ ячейки Браве  $\alpha$ -решетки

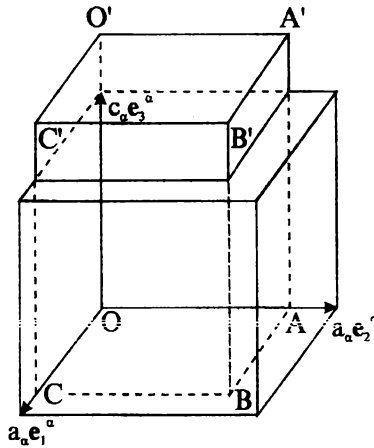


Рис. 1.6. Преобразование (1.33) ОЦТ ячейки Браве  $\alpha$ -решетки

При переходе к базису (1.27) тензор (1.30) приобретает вид

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{\kappa\tau\sqrt{2}} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \frac{1}{\kappa} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 . \quad (1.32)$$

Тензор

$$\mathbf{E}^{(3)} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1^\alpha \cdot \mathbf{e}_1^\alpha + \mathbf{e}_2^\alpha \cdot \mathbf{e}_2^\alpha) + \frac{1}{\kappa\tau} \mathbf{e}_3^\alpha \cdot \mathbf{e}_3^\alpha , \quad (1.33)$$

последний из набора тензоров (1.23), преобразует  $\alpha$ -решетку в  $\gamma$ -решетку по схеме Бейна, так как ОЦТ ячейка Браве  $\alpha$ -решетки, построенная на век-

торах (1.26), в этом случае деформируется в тетрагональную ячейку ОАВ-СО'А'В'С'  $\gamma$ -решетки, вытянутую в направлении  $\mathbf{e}_3^\alpha$  тетрагональной оси  $\alpha$ -решетки (рис. 1.6). Ориентационные соотношения между решетками при бейновской  $\alpha \rightarrow \gamma$  деформации выражаются формулами:

$$\mathbf{e}_1^\alpha = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2^\alpha = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3^\alpha = \mathbf{e}_3. \quad (1.34)$$

Тензор (1.33) в базисе (1.27) принимает вид

$$\mathbf{E}^{(3)} = \frac{1}{\kappa\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + \frac{1}{\kappa\tau} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3. \quad (1.35)$$

Сравнивая (1.35) и (1.6) с учетом обозначений (1.24), легко видеть, что тензор (1.35) является обратным по отношению к тензору (1.6), преобразующему  $\gamma$ -решетку в  $\alpha$ -решетку по схеме Бейна.

#### 4. Преобразование $\gamma$ -решетки в $\alpha$ -решетку

Собственно деформация  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку и собственно деформация  $\alpha$ -решетки в  $\gamma$ -решетку – преобразования взаимно обратные. Поэтому  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройка решетки реализуема теми же тремя способами, что и  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройка. Тензоры  $\mathbf{E}^{(v)}$ ,  $v=1, 2, 3$ , отображающие  $\gamma$ -решетку в  $\alpha$ -решетку<sup>1</sup>, выражаются формулами:

$$\mathbf{E}^{(1)} = \kappa\sqrt{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \kappa\tau\sqrt{2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \kappa \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \kappa\tau\sqrt{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \kappa\sqrt{2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \kappa \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{E}^{(3)} = \kappa\sqrt{2} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \kappa\sqrt{2} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \kappa\tau \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3, \quad (1.38)$$

которые получаются из формул (1.29), (1.32), (1.35) путем обращения

$$\frac{1}{\kappa\sqrt{2}} \rightarrow \kappa\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\kappa\tau\sqrt{2}} \rightarrow \kappa\tau\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\kappa} \rightarrow \kappa \text{ собственных значений.}$$

---

<sup>1</sup> Для обозначения тензоров, описывающих прямое и обратное преобразование решеток, здесь используются одни и те же символы, так как это не приводит к недоразумениям в дальнейшем.

Ориентационное соответствие между решетками  $\gamma$  и  $\alpha$ , связанными преобразованиями (1.36) – (1.38), можно выразить соотношениями:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2^\alpha, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3^\alpha, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1^\alpha, \quad (1.39)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3^\alpha, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1^\alpha, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2^\alpha, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^\alpha, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2^\alpha, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^\alpha, \quad (1.41)$$

непосредственно следующими из ориентационных соотношений (1.28), (1.31), (1.34). Орты  $\mathbf{e}_1^\alpha$ ,  $\mathbf{e}_2^\alpha$  в  $\alpha$ -решетке направлены вдоль осей симметрии второго порядка, а орт  $\mathbf{e}_3^\alpha$  – вдоль оси симметрии четвертого порядка (см. рис. 1.2), если  $\alpha$  есть ОЦТ решетка. Соотношения (1.39), (1.40) и (1.41) в этом случае определяют разные варианты ориентационного соответствия решеток  $\gamma$  и  $\alpha$ . Первые два указывают на изменение ориентации осей симметрии  $\gamma$ -решетки в результате  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки (ось симметрии второго порядка в  $\gamma$ -решетке становится осью симметрии четвертого порядка в  $\alpha$ -решетке, и наоборот), а последнее – на отсутствие такого изменения (оси симметрии второго и четвертого порядков в  $\gamma$ -решетке остаются осями симметрии второго и четвертого порядков и в  $\alpha$ -решетке). Если же  $\alpha$  есть ОЦК решетка, то направления  $\mathbf{e}_1^\alpha$  и  $\mathbf{e}_2^\alpha$  кристаллографически эквивалентны направлению  $\mathbf{e}_3^\alpha$ . Тогда различие между тензорами (1.36) – (1.38) исчезает, а соотношения (1.39), (1.40) оказываются разновидностями ориентационных соотношений Бейна (1.41).

Таким образом, само существование трех вариантов собственно деформации  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку непосредственно связано с тетрагональностью  $\alpha$ -решетки. Наглядно это иллюстрируется на примере деформации тетрагональной ячейки ОАВСО'А'В'С' (см. рис. 1.1), которую можно преобразовать без изменения ориентации ребер в тетрагональную ячейку со сторонами  $a_\alpha$ ,  $c_\alpha$  ( $a_\alpha < c_\alpha < a_\gamma$ ) тремя способами, комбинируя подходящим образом растяжения в направлениях  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  и сжатие в направлении  $\mathbf{e}_3$ , а в кубическую ячейку со стороной  $a_\alpha$  – единственным способом, а именно по схеме Бейна.

### Заключение к главе

Описание  $\gamma - \alpha$  перестройки, рассмотренное выше, свидетельствует о том, что собственно деформация, преобразующая одну решетку в другую, не всегда единственна. Неединственность эта приводит, в свою очередь, к неединственности решения задачи о деформационном превращении решеток, взятой в исходной постановке, т. е. в постановке, подразумевающей под решением все варианты однородной деформации решетки  $X$  в решетку  $\gamma$ , определяемые взаимным расположением узлов в каждой из решеток. Действительно, теорема о разложении тензора  $L$  в произведение симметричного  $E$  и ортогонального  $\Omega$  тензоров позволяет трактовать преобразование (1.1) как последовательность преобразований, первое из которых ответственно за собственно деформацию одной решетки в другую, второе — за изменение взаимной ориентации решеток. Симметричная часть тензора  $L$  находится из уравнений (1.8), (1.12). Если уравнения эти имеют несколько решений

$$E^{(v)}, \quad v = 1, 2, \dots,$$

то несколько решений

$$L^{(v)} = \Omega E^{(v)}, \quad v = 1, 2, \dots \quad (1.42)$$

будет иметь и уравнение (1.9), выражающее тензор  $L$  через его симметричную часть.

## Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Решения (1.42) исчерпывают множество тензоров, отображающих решетку  $X$  в решетку  $g$ , так как все варианты собственно деформации решетки  $X$  в решетку  $g$  исчерпываются решениями  $E^{(v)}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , уравнений (1.8), (1.12). Поэтому задачу о деформационном преобразовании решеток  $X$  и  $g$  можно считать решенной, если для каждого  $E^{(v)}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , указано ортогональное преобразование  $\Omega$ .

Преобразование  $\Omega$  при заданном  $E^1$  изменяет только ориентацию решетки, полученной из решетки  $X$  в результате собственно деформации. Поэтому вопрос о выделенности  $\Omega$  – это вопрос о выделенности ориентационного соответствия между решетками  $X$  и  $g$ , который следует решать, исходя из принципов, учитывающих не только взаимное расположение узлов в каждой из решеток, но и расположение узлов одной решетки относительно другой.

### 1. Свойства близости решеток, связанных собственно деформацией

Интересуясь ориентационным соответствием решеток, нельзя оставить без внимания принцип максимальной близости решеток. Математическая формулировка<sup>2</sup> его основывается на понятии меры, количественно характеризующей различие между решетками. Приведем определение такой меры, следуя работам [27], [28].

Пусть имеются решетки  $g$  и  $g'$ . Предположим, что решетки эти есть результат преобразований

$$g = LX, \quad g' = TX \quad (2.1)$$

некоторой решетки  $X$ . Тогда близость решеток  $g$  и  $g'$  будет означать близость тензоров  $L$  и  $T$ , и наоборот. Паре же тензоров  $L$  и  $T$  можно поставить в соответствие число

---

<sup>1</sup> Здесь и далее, где это не приводит к недоразумениям, индекс  $v$  при  $E$  для сокращения записи опускается.

<sup>2</sup> Принцип максимальной близости решеток к настоящему времени не получил общепринятой математической формулировки, хотя понятия сближения и близости решеток, постулируемые неявно, использовались в исследованиях, посвященных мартенситной проблематике [8, 14, 24 – 26].

$$m(L, T) = \sqrt{\text{Sp}[(L - T)(L - T)^*]}, \quad (2.2)$$

имеющее смысл расстояния между точками, изображающими тензоры  $L$  и  $T$  в абстрактном девятимерном евклидовом пространстве, и удовлетворяющее условиям:  $m(L, L) = 0$ ,  $m(L, T) > 0$  ( $L \neq T$ ),  $m(L, T) = m(T, L)$ ,  $m(L, T) \leq m(L, F) + m(F, T)$ , обычным для расстояния между точками. Число (2.2), характеризующее разницу между тензорами  $L$  и  $T$ , естественно принять за характеристику различия между решетками  $g$  и  $g'$ , учитывая (2.1), и положить  $m(g, g') = m(L, T)$ . Тогда оно будет служить мерой, выражающей количественно свойство близости таких объектов, как кристаллические решетки.

Возвращаясь к обсуждению деформационного преобразования (1.1) решетки  $X$  в решетку  $g$ , отметим, что трактовка его как составного преобразования, следующая из разложения (1.9) тензора  $L$ , позволяет ввести при заданном  $E$  множество решеток  $g(\Omega)$ , отличающихся ориентацией, относительно решетки  $X$ , и поставить вопрос о выборе решетки  $g(\Omega_0)$ , максимальной близкой к решетке  $X$ . Выбор этот сводится к решению задачи на экстремум (минимум) меры

$$m(g(\Omega), X) = m(L(\Omega), I) = \sqrt{\text{Sp}[(L(\Omega) - I)(L(\Omega) - I)^*]} = \quad (2.3)$$

$$= \sqrt{\text{Sp}[E^2 + I - E(\Omega + \Omega^*)]},$$

характеризующей различие между решетками  $g(\Omega)$  и  $X$ . Тензор  $E$  в (2.3) предполагается заданным, а преобразование  $\Omega$ , представляющее собой поворот, является тензорной функцией

$$\Omega = \cos\Psi I + (1 - \cos\Psi)\lambda \cdot \lambda + \sin\Psi U_\lambda \quad (2.4)$$

параметров  $\Psi$  и  $\lambda$ , где  $\Psi$  – угол поворота,  $0 \leq \Psi < 2\pi$ , орт  $\lambda$  задает ориентацию оси поворота,  $U_\lambda$  – антисимметричный оператор, действие которого на произвольный вектор  $X$  определяется правилом  $U_\lambda X = [\lambda, X]$ .

Условие минимума меры (2.3) нетрудно установить, выразив формулу (2.3) в ином виде. Для этого воспользуемся тождеством

$$E^2 + I - E(\Omega + \Omega^*) \equiv (E - I)^2 + 2E(I - \Omega_s), \quad (2.5)$$

где

$$I - \Omega_s = I - [(\Omega + \Omega^*)/2] = (1 - \cos\Psi)(I - \lambda \cdot \lambda).$$

Подставляя (2.5) в (2.3) и учитывая, что  $\text{Sp}(E \lambda \cdot \lambda) = (\lambda, E\lambda)$ , будем иметь

$$m(g(\Omega), X) = m(L(\Omega), I) = \sqrt{[m(E, I)]^2 + 2(1 - \cos\Psi)[\text{Sp } E - (\lambda, E\lambda)]}, \quad (2.6)$$

где  $m(E, I) = \sqrt{\text{Sp}[(E - I)^2]}$  – есть мера  $m(r(I), I)$ , характеризующая различие между решетками  $r(I)$  и  $X$ , связанными собственно деформацией  $E$ .

Второе слагаемое под знаком радикала в (2.6) неотрицательно, так как  $\text{Sp } E - (\lambda, E\lambda) > 0$ , поэтому наименьшее значение меры (2.6) достигается при  $\Psi = 0$ , когда оно исчезает. Такому  $\Psi$  соответствует (см. формулу (2.4)) преобразование  $\Omega_0 = I$  и, стало быть, среди решеток  $\{r(\Omega)\}$  требованию максимальной близости к решетке  $X$  отвечает при заданном  $E$  решетка  $r(I)$ , которая получается из решетки  $X$  в результате собственно деформации  $E$ . Если последняя не единственна, то дальнейшему сравнению подлежат уже значения мер  $m(E^{(v)}, I)$  для всех тензоров  $E^{(v)}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , отображающих решетку  $X$  в решетку  $r$ , по результатам которого среди решеток  $r^{(v)}(I)$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , и устанавливается решетка, самая близкая к решетке  $X$ . Например, в случае тензоров (1.25), (1.30), (1.35) и (1.36), (1.37), (1.38), отображающих решетку  $\alpha$  в решетку  $\gamma$  и обратно, такая процедура приводит к соотношениям  $m(E^{(1)}, I) = m(E^{(2)}, I) > m(E^{(3)}, I)$ , справедливым при  $k$  и  $t$ , типичных для аустенита и тетрагонального мартенсита сплавов железа, которые указывают на максимальную близость решеток  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанных деформацией Бейна.

Итак, принцип максимальной близости решеток приводит к однозначному заключению о выделенности тех вариантов деформационного преобразования решеток и тех вариантов ориентационного соответствия между ними, которые заведомо определяются взаимным расположением узлов в каждой из решеток в отдельности. Исходя из этого, естественно ожидать, например, бейновского ориентационного соответствия между решетками  $\alpha$ -мартенсита и  $\gamma$ -аустенита в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  МП в сплавах железа. Оно и наблюдалось при МП в очень тонких пленках [29], но для решеток  $\alpha$ -мартенсита массивных образцов характерны другие ориентировки, близкие к ориентировкам Нипшиямы или Курдюмова – Закса.

Это расхождение однако нельзя расценивать как бесспорное свидетельство несостоятельности принципа максимальной близости решеток. Дело в том, что отношение порядка, устанавливаемое неравенствами  $m(\alpha_B, \gamma) < m(\alpha_N, \gamma) < m(\alpha_{K-Z}, \gamma)$  [27] для решеток  $\alpha_B$ ,  $\alpha_N$ ,  $\alpha_{K-Z}$ , отвечающих ориентационным соотношениям Бейна, Нипшиямы, Курдюмова – Закса, и выделяющее бейновскую ориентировку, получается в предположении, что  $\gamma$ -решетка совершенна. Следует однако иметь в виду, что использование такой идеализации, как совершенный  $\gamma$ -аустенит, в качестве модели струк-



турного состояния, предшествующего  $\gamma \rightarrow \alpha$  МП, не оправдано, поскольку современные концепции зарождения  $\alpha$ -мартенсита связывают возможность спонтанной структурной перестройки аустенита на стадии зарождения с местами, в которых аустенит уже предварительно деформирован. Считается, что эти деформации сближают решетки аустенита и мартенсита, обеспечивая выгодные условия для флуктуационного преодоления энергетического барьера в процессе зародышеобразования. В таком случае выделенность той или иной ориентировки следует устанавливать, исходя из близости решеток  $\alpha_B$ ,  $\alpha_N$ ,  $\alpha_{K-Z}$  к решетке несовершенного  $\gamma$ -аустенита в местах, предположительно пригодных для зарождения  $\alpha$ -мартенсита. Соответствующие исследования проводились в предположении, что искажения аустенита обусловлены винтовой и 60-градусной дислокациями характеристического для ГЦК решеток направления  $\langle 1\bar{1}0 \rangle_\gamma$  [27].

Оказалось, что в окрестности винтовой дислокации выделенной становится ориентировка Курдюмова – Закса, а близость решеток  $\alpha_B$ ,  $\alpha_N$ ,  $\alpha_{K-Z}$  к решетке несовершенного аустенита в окрестности 60-градусной дислокации зависит от упругих свойств (значений коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра упругой анизотропии  $A$ ) аустенита. При  $\nu$  и  $A$ , соответствующих сплавам Fe-Ni инварного состава, решетка несовершенного аустенита максимально приближается к решетке  $\alpha_N$  с ориентировкой Нишиямы. Выделенность же ориентировки Курдюмова – Закса имеет место лишь при заметном (не менее чем на порядок) возрастании параметра упругой анизотропии.

Результаты, перечисленные выше, свидетельствуют в пользу принципа максимальной близости решеток, хотя и не могут рассматриваться как исчерпывающее доказательство его применимости, так как в проведенных исследованиях [27] не учитывались эффекты возникновения границы раздела фаз и внутренних напряжений, свойственные фазовому превращению, протекающему в твердом состоянии.

## 2. Деформация с инвариантной плоскостью

Сопряжение фаз с различными кристаллическими решетками предполагает взаимную аккомодацию этих решеток, компенсирующую их несовпадение на границе раздела фаз. Аккомодация может происходить путем упругих искажений решеток и неупругих, связанных с образованием дислокаций несоответствия и конденсацией вакансий на границе раздела

фаз. Однако только упругие искажения являются источником внутренних напряжений. Поэтому выделенным можно считать такое сопряжение фаз, при котором совмещаются кристаллические плоскости фаз, характеризуемые минимальным расхождением в положениях атомов. Тогда упругие смещения атомов в плоскости границы будут иметь минимальную величину и соответственно минимальной будет энергия внутренних напряжений.

Необходимость в компенсирующих упругих смещениях отпадает во все, если деформационная перестройка одной решетки в другую при фазовом превращении совместима с существованием плоскости, не испытывающей деформации. Плоскость, не испытывающая деформации при перестройке одной решетки в другую, есть плоскость, общая (в смысле совпадения всех узлов) для обеих решеток. Сопряжение фаз по плоскости, общей для решеток этих фаз, является идеальным, так как не требует компенсирующих упругих смещений, приводящих к внутренним напряжениям. Плоскость сопряжения, обладающая такими свойствами, называется в литературе инвариантной плоскостью, а деформация, не изменяющая взаимное расположение узлов в параллельных плоскостях преобразуемой решетки и ориентацию этих плоскостей, называется деформацией с инвариантной плоскостью.

Вид тензора  $L$ , отображающего одну решетку в другую в случае деформационного преобразования с инвариантной плоскостью, найти нетрудно, учитывая, что соответствие между радиус-векторами  $X_1$ ,  $X_2$  и  $g_1$ ,  $g_2$ , определяющими положение узлов в плоскости, общей для преобразуемой  $X$  и преобразованной  $g$  решеток, устанавливается равенствами:  $g_1 = X_1$ ,  $g_2 = X_2$ . Равенства эти позволяют исключить  $g_1$ ,  $g_2$  в (1.3) и выразить  $L$  формулой

$$L = I + u_3 \cdot X^3, \quad (2.7)$$

где  $u_3 = g_3 - X_3$ . Легко видеть, что тензор (2.7) согласуется с представлениями о деформации, при которой всякая плоскость решетки  $X$ , задаваемая нормалью

$$N = X^3 / |X^3|, \quad (2.8)$$

перемещается поступательно как целое, не испытывая в остальном никаких изменений<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> За исключением плоскости, проходящей через начало  $O$ , узлы которой не изменяют своих положений.

Следует однако иметь в виду, что наличие плоскости, общей для решеток  $X$  и  $\gamma$ , зависит только от взаимного расположения узлов в каждой из них, поэтому критерии, позволяющие судить о возможности или невозможности преобразования решетки  $X$  в решетку  $\gamma$  посредством деформации с инвариантной плоскостью, должны выражаться через параметры собственно деформации  $E$ . В этой связи уместно отметить, что симметричная часть  $E = \sqrt{L^* L}$  тензора (2.7) имеет вид

$$E = I + \sum_{k=1}^2 (E_k - 1) e_k \cdot e_k,$$

где

$$e_k = [N - (-1)^k (s / |s|)] / |N - (-1)^k (s / |s|)|,$$

$$s = |X^3| (u_3 + \frac{1}{2} |u_3|^2 X^3),$$

а  $N$  определяется формулой (2.8). Для нее характерны собственные значения

$$E_1 = \sqrt{1 + (s, N) + |s|}, \quad E_2 = \sqrt{1 + (s, N) - |s|}, \quad E_3 = 1,$$

одно из которых всегда больше единицы (или равно ей при  $(N, s) = -|s|$ ), другое всегда меньше единицы (или равно ей при  $(N, s) = |s|$ ), а третье равно единице. Именно такие свойства и отличают собственно деформацию  $E$  в тех случаях, когда взаимное расположение узлов в решетках  $X$  и  $\gamma$  допускает преобразование  $X$  в  $\gamma$  посредством деформации с инвариантной плоскостью [15]. Наглядным свидетельством тому может служить геометрическая картина деформационного преобразования воображаемого сферического объема кристалла, имеющего радиус, равный единице. Однородная деформация

$$r = EX, \tag{2.9}$$

превращает этот объем в эллипсоид с полуосями, равными собственным значениям  $E_1, E_2, E_3$  тензора  $E$ . Поверхности эллипсоида и сферы пересекаются при условии, что одно из собственных значений тензора  $E - E_1$ , например, больше единицы, другое  $- E_2$  меньше единицы. Если дополнительно к этому единице равно третье собственное значение, то эллипсоид и сфера имеют два общих круговых сечения (рис. 2.1), задаваемых уравнениями

$$r_{\pm} = \left[ \left( \pm \sqrt{1 - E_2^2} e_1 + \sqrt{E_1^2 - 1} e_2 \right) / \sqrt{E_1^2 - E_2^2} \right] \sin \vartheta + e_3 \cos \vartheta,$$

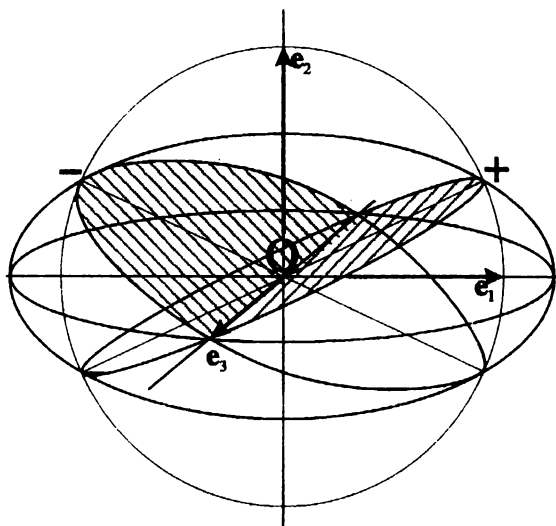


Рис. 2.1. Деформация с инвариантной плоскостью сферического объема кристалла

где  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{E}$ , а  $\vartheta$  – угол, изменяющийся в пределах от 0 до  $2\pi$  рад.

Это означает, что при выполнении условий

$$E_1 > 1, \quad E_2 < 1, \quad E_3 = 1 \quad (2.10)$$

существуют плоские сечения сферического объема, задаваемые векторами нормалей  $\mathbf{N}_\pm$ , которые под действием преобразования (2.9) ведут себя как абсолютно жесткие и лишь изменяют ориентацию, занимая положения, задаваемые векторами нормалей  $\mathbf{n}_\pm$ , где

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_\pm &= [\mathbf{r}_\pm, \mathbf{e}_3] / \|\mathbf{r}_\pm, \mathbf{e}_3\| = \left[ \sqrt{E_1^2 - 1} \mathbf{e}_1 - (\pm 1) \sqrt{1 - E_2^2} \mathbf{e}_2 \right] / \sqrt{E_1^2 - E_2^2}, \\ \mathbf{N}_\pm &= [\mathbf{E}^{-1} \mathbf{r}_\pm, \mathbf{e}_3] / \|\mathbf{E}^{-1} \mathbf{r}_\pm, \mathbf{e}_3\| = \mathbf{E} \mathbf{n}_\pm / |\mathbf{E} \mathbf{n}_\pm| = \\ &= \left[ E_1 \sqrt{E_1^2 - 1} \mathbf{e}_1 - (\pm 1) E_2 \sqrt{1 - E_2^2} \mathbf{e}_2 \right] / \sqrt{(E_1^2 - E_2^2)(E_1^2 + E_2^2 - 1)}. \end{aligned}$$

Ориентацию любого из них можно восстановить, дополнив деформацию (2.9) ортогональным преобразованием  $\Omega_+$  или  $\Omega_-$ , где

$$\Omega_\pm = (\mathbf{n}_\pm, \mathbf{N}_\pm)(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \pm \|\mathbf{n}_\pm, \mathbf{N}_\pm\| (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3,$$

что приводит к деформационному преобразованию

$$\mathbf{r} = \mathbf{L}_{\pm} \mathbf{X},$$

где  $\mathbf{L}_{\pm} = \Omega_{\pm} \mathbf{E}$ , рассматриваемого сферического объема, сохраняющему положение и форму плоского кругового сечения с нормалью  $\mathbf{N}_{\pm}$ , т. е. к деформации с инвариантной плоскостью. Очевидно, что ортогональное преобразование не требуется, если не одно, а два собственных значения тензора  $\mathbf{E}$  равны единице. В этом случае собственно деформация (2.9) сама по себе является деформацией с инвариантной плоскостью.

Условия (2.10) деформации с инвариантной плоскостью для большинства решеток, испытывающих взаимное превращение, не выполняются, т. е. решетки превращающихся фаз не имеют обычно ни рациональной, ни иррациональной плоскости сопряжения, если судить по параметрам собственно деформации  $\mathbf{E}$ . С другой стороны, экспериментальные факты свидетельствуют о том, что макроскопическая деформация объема, испытывающего мартенситное превращение, представляет собой однородную деформацию с инвариантной плоскостью, отличную от деформации решетки<sup>1</sup>. Возникающее затруднение устраняется, если макроскопическую деформацию трактовать как составную, включающую в себя деформацию решетки и некоторую дополнительную деформацию, которая изменяет форму превращенной области, не изменяя решетки (деформация при инвариантной решетке). Эта дополнительная деформация может осуществляться путем скольжения или двойникования<sup>2</sup> и в сочетании с деформацией решетки должна давать деформацию с инвариантной плоскостью.

Задача кристаллографических теорий, рассматривающих мартенситное превращение как деформацию с инвариантной плоскостью, состоит таким образом в следующем: при заданной собственно деформации решетки найти дополнительную деформацию при инвариантной решетке (сдвиг, двойникование), которая в сочетании с собственно деформацией и вращением приводила бы к деформации с инвариантной плоскостью; вычислить параметры последней и установить ориентационное соответствие

---

<sup>1</sup> Впервые это было установлено А. Б. Гренингером и А. Р. Трояно [30] на основании количественного металлографического исследования рельефа, возникающего на предварительно полированной поверхности образца стали Fe – 22% Ni – 0,8% C в результате  $\gamma \rightarrow \alpha$  МП.

<sup>2</sup> Двойникование, строго говоря, не является деформацией при инвариантной решетке, так как сохраняет только тип решетки, изменяя ее ориентировку.

между решетками превращающихся фаз. Фундаментальный вклад в создание таких теорий, достаточно полно освещенных в литературе [11], внесли исследования, представленные в работах [31], [32]. Все они основываются на использовании условий (2.10), заведомо не позволяющих исключить неопределенность в выборе дополнительной деформации при инвариантной решетке.

В результате возникает необходимость в разделении элементов деформации на задаваемые и подлежащие определению, которое в упомянутых исследованиях имеет физическое, а не геометрическое (следующее из строения решеток) обоснование, хотя возможности последнего в этом плане не изучены. Не имеет геометрического обоснования и принимаемый вид дополнительной деформации, его постулируют, обращаясь к экспериментальным фактам [30]. Такое состояние дел в основаниях логической схемы кристаллографических теорий нельзя признать удовлетворительным, так как кристаллографические теории по самому смыслу – теории геометрические. Учитывая это, вернемся к изучению свойств преобразования (1.1) решетки  $X$  в решетку  $г$  с геометрической точки зрения, полагая собственно деформацию  $E$  известной и принимая в качестве базисных объектов ориентационные инварианты преобразования [33].

### 3. Представление ориентационно неизменных плоскостей

Пусть  $\Pi_X$  – некоторая плоскость решетки  $X$ . Пусть ориентация плоскости  $\Pi_X$  задается единичным вектором нормали  $N$ , а положение – радиус-вектором  $X$  какого-либо узла плоскости  $\Pi_X$ . После деформации (1.1) узлы плоскости  $\Pi_X$  изменяют свое расположение, образуя плоскости  $\Pi_г$  решетки  $г$ . Положение и ориентация плоскости  $\Pi_г$  задаются радиус-вектором  $г$  узла плоскости  $\Pi_г$  и единичным вектором нормали  $n$  (рис. 2.2), которые связаны с  $X$  и  $N$  соотношениями

$$г = LX, \quad n = L^{-1}N / |L^{-1}N|,$$

или

$$n = L^{-1}N / |E^{-1}N|, \quad (2.11)$$

если учесть, что  $|L^{-1}N| = |E^{-1}N|$ .

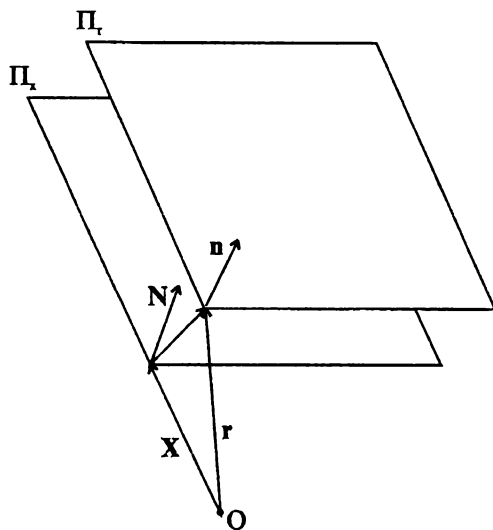


Рис. 2.2. Ориентационное поведение плоскостей при деформации (1.1)

Плоскость решетки  $X$  будем называть ориентационно-неизменной плоскостью (ОИП) относительно деформации (1.1), если ее ориентация при этой деформации не испытывает изменений. Вектор нормали  $\mathbf{N}$  к ОИП удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{N} = \mathbf{L}^* \mathbf{N} / |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}|, \quad (2.12)$$

следующему из (2.11). Уравнение (2.12), переписанное в виде  $\mathbf{L}^* \mathbf{N} = |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}|^{-1} \mathbf{N}$ , говорит о том, что вектор нормали  $\mathbf{N}$  к ОИП представляет собой собственный вектор тензора  $\mathbf{L}^*$ , соответствующий собственному значению  $|\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}|^{-1}$  и является, следовательно, характеристическим для тензора  $\mathbf{L}^*$  объектом.

Собственные значения и собственные векторы тензоров  $\mathbf{L}^*$  и  $\mathbf{L}$  связаны между собой. Установим эту связь, полагая, что собственные значения  $L_1^*, L_2^*, L_3^*$  тензора  $\mathbf{L}^*$  невырождены. Тензор  $\mathbf{L}^*$  в этом случае имеет три линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3$  (существуют три семейства непараллельных ОИП) и может быть представлен в виде

$$\mathbf{L}^* = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_i^* \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}^i, \quad (2.13)$$

где  $\mathbf{L}_i^* = |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_i|^{-1}$ ,  $\mathbf{N}^i = \frac{1}{2V_0} \sum_{k,m=1}^3 \delta_{ikm} [\mathbf{N}_k, \mathbf{N}_m]$ ,  $V_0 = (\mathbf{N}_1, [\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3])$ ,  $\delta_{ikm}$  – символ Леви-Чивита. Формула (2.13) позволяет перейти к формуле, определяющей тензор  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_i^* \mathbf{N}^i \cdot \mathbf{N}_i,$$

или

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{L}_i \mathbf{l}_i \cdot \mathbf{l}^i, \quad (2.14)$$

где  $\mathbf{L}_i$  – собственные значения, а  $\mathbf{l}_i$  – собственные векторы тензора  $\mathbf{L}$ .

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^* = |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_i|^{-1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{N}^i / |\mathbf{N}^i|, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{l}^i = |\mathbf{N}^i| \mathbf{N}_i.$$

Формулы (2.15) и (2.16) выражают собственные значения и собственные векторы тензора  $\mathbf{L}$  через нормали к ОНП. Обстоятельство это весьма существенно, так как позволяет сделать важные выводы относительно собственных значений тензора  $\mathbf{L}$ , а именно указать пределы изменения собственных значений и предложить геометрически наглядную интерпретацию этих собственных значений. Действительно, величина  $|\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}|$ , рассматриваемая при заданном  $\mathbf{E}$  как функция орта  $\mathbf{N}$ , ограничена снизу и сверху<sup>1</sup>:  $E_1^{-1} \leq |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}| \leq E_3^{-1}$ , где через  $E_3$  и  $E_1$  обозначены наименьшее

---

<sup>1</sup> Условие экстремума функции  $|\mathbf{T}\mathbf{N}| = \sqrt{(\mathbf{T}\mathbf{N}, \mathbf{T}\mathbf{N})} = \sqrt{(\mathbf{N}, \mathbf{T}^2 \mathbf{N})}$ , где  $\mathbf{T}$  – симметричный тензор, предполагает исчезновение первой вариации  $\delta|\mathbf{T}\mathbf{N}| \sim (\mathbf{T}^2 \mathbf{N}, \delta \mathbf{N}) = (\delta \Phi, [\mathbf{N}, \mathbf{T}^2 \mathbf{N}])$ , соответствующей вариации  $\delta \mathbf{N} = [\delta \Phi, \mathbf{N}]$  орта  $\mathbf{N}$ , где  $\delta \Phi$  – произвольный вектор, что имеет место при произвольном  $\delta \Phi$ , если  $\mathbf{N}$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{T}$ . Поэтому справедливы неравенства  $T_3 \leq |\mathbf{T}\mathbf{N}| \leq T_1$ , где  $T_3$  и  $T_1$  – наименьшее и наибольшее собственные значения тензора  $\mathbf{T}$ . Наглядным подтверждением тому может служить картина деформационного преобразования  $\mathbf{n} = \mathbf{T}\mathbf{N}$  сферы единичного радиуса, в результате которого получается эллипсоид с полуосями, равными собственным значениям тензора  $\mathbf{T}$ .



и наибольшее собственные значения тензора  $\mathbf{E}$ . С обеих сторон ограничена и обратная ей величина:  $E_3 \leq |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}|^{-1} \leq E_1$ , поэтому собственные значения тензора  $\mathbf{L}$  (см. формулы (2.15)) удовлетворяют неравенствам

$$E_3 \leq L_1, L_2, L_3 \leq E_1. \quad (2.17)$$

Далее отметим, что деформационное преобразование решетки  $\mathbf{X}$  в решетку  $\mathbf{r}$  заключается в параллельном перемещении ориентационно-неизменных плоскостей каждого семейства и в деформации самих плоскостей. Количественно эти вклады в деформацию можно охарактеризовать отношениями

$$h_i / H_i, \sigma_i / \Sigma_i, \quad (2.18)$$

где  $h_i$  и  $H_i$  – кратчайшие расстояния между двумя ОНП с нормалью  $\mathbf{N}_i$ , а  $\sigma_i$  и  $\Sigma_i$  – площади параллелограммов в любой из них до и после деформации (1.1) соответственно.

Нетрудно показать, что

$$h_i / H_i = |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_i|^{-1}, \sigma_i / \Sigma_i = |\mathbf{E}| |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_i|, \quad (2.19)$$

где  $|\mathbf{E}| \equiv \det \mathbf{E}$ , т. е. отношения (2.18) зависят, как и следовало ожидать, только от  $\mathbf{N}_i$  и собственно деформации  $\mathbf{E}$ . Формулы (2.19) позволяют исключить  $|\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_i|$  в (2.15), что приводит к выражениям

$$L_i = h_i / H_i, L_i = |\mathbf{E}| (\sigma_i / \Sigma_i)^{-1}, \quad (2.20)$$

раскрывающим геометрический смысл собственных значений тензора  $\mathbf{L}$ .

Таким образом, ориентационно неизменные плоскости являются выделенными объектами при описании деформационной перестройки решетки  $\mathbf{X}$  в решетку  $\mathbf{r}$ . Использование их позволяет наглядно представить геометрическую картину деформации и связать ее с характеристическими составляющими тензора  $\mathbf{L}$  – собственными значениями (см. формулы (2.20)) – и инвариантными подпространствами (см. формулы (2.16)) как линиями пересечения ОНП. С другой стороны, формулы (2.13), (2.14) получаются в предположении, что собственные значения тензора  $\mathbf{L}^*$  невырождены. Случай этот не представляет интереса с точки зрения целей настоящей работы, поскольку при отсутствии вырождения все подпространства, инвариант-

ные относительно преобразования (1.1), одномерны, а инвариантная плоскость – подпространство двухмерное.

#### 4. Вырождение собственных значений и размерность инвариантных подпространств

Предположим, что собственные значения тензора  $L^*$  таковы, что<sup>1</sup>

$$L_1 = L_2, \quad L_3 \neq L_1, \quad (2.21)$$

и пусть вырожденному собственному значению соответствует единственная ОНП с нормалью  $N_1$ . Тогда будем иметь

$$L^* N_1 = L_1 N_1, \quad L^* N_3 = L_3 N_3. \quad (2.22)$$

Задача состоит в том, чтобы выразить тензор  $L^*$  через собственные значения  $L_1, L_3$  и нормали  $N_1, N_3$ . Решение ее можно получить, дополнив уравнения (2.22) еще одним уравнением

$$L^* [N_3, N_1] = L_1^{-1} E^2 [N_3, N_1], \quad (2.23)$$

которое следует из закона преобразования

$$L^{-1} [N_3, N_1] = [L^* N_3, L^* N_1] / \det L = L_3 L_1 [N_3, N_1] / \det L \quad (2.24)$$

векторного произведения  $[N_3, N_1]$  нормалей  $N_3, N_1$  к ОНП и равенств

$$E^2 L^{-1} = L^*, \quad \det L = \det(L^*) = L_1^2 L_3.$$

Перепишем уравнения (2.22), (2.23) в виде

$$L^* v_i = v'_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.25)$$

используя обозначения

$$v_1 \equiv N_1, \quad v_2 \equiv [N_3, N_1] / |[N_3, N_1]|, \quad v_3 \equiv N_3, \quad (2.26)$$

$$v'_1 \equiv L_1 v_1, \quad v'_2 \equiv E^2 v_2 / L_1, \quad v'_3 \equiv L_3 v_3, \quad (2.27)$$

и перейдем к уравнению

---

<sup>1</sup> Символ звездочка, отличающий собственные значения тензора  $L^*$  от собственных значений тензора  $L$ , для сокращения записи опускается, поскольку тензоры  $L^*$  и  $L$  имеют одни и те же собственные значения.

$$\mathbf{L}^* = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}^i, \quad (2.28)$$

разрешая (2.25) относительно  $\mathbf{L}^*$ , где

$$\mathbf{v}^1 = [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3] / (\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]) = [\mathbf{N}_3, [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3]] / \|\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3\|^2, \quad (2.29a)$$

$$\mathbf{v}^2 = [\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1] / (\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]) = \mathbf{v}_2, \quad (2.29б)$$

$$\mathbf{v}^3 = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] / (\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]) = [\mathbf{N}_1, [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1]] / \|\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1\|^2; \quad (2.29в)$$

$$(\mathbf{v}_1, [\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3]) = (\mathbf{v}^1, [\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3])^{-1} = \|\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1\|, \quad |\mathbf{v}^1| = |\mathbf{v}^3| = 1 / \|\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1\|, \quad |\mathbf{v}^2| = 1.$$

Уравнение (2.28) определяет тензор  $\mathbf{L}^*$  через векторы (2.26), (2.27), зависящие, как это и требовалось, от  $L_1, L_3, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3$ . Через те же векторы будет выражаться и тензор  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}^i \cdot \mathbf{v}'_i$$

или

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_1 + L_1^{-1} \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2 + L_3 \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v}_3. \quad (2.30)$$

Что же касается собственных векторов тензора (2.30), то из закона преобразования (2.24), переписанного в виде  $\mathbf{L} \mathbf{v}_2 = L_1 \mathbf{v}_2$ , следует, что собственному значению  $L_1$  соответствует собственный вектор

$$\mathbf{l}_1 = \mathbf{v}_2. \quad (2.31)$$

Вывод этот согласуется с формулой (2.30), если учесть, что

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2, \quad (\mathbf{v}_2, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) = (\mathbf{L} \mathbf{v}_2, \mathbf{L} \mathbf{v}_2) = L_1^2, \quad (2.32)$$

и понятен с геометрической точки зрения, так как непараллельные ОНП выделяют прямую – линию их пересечения, вдоль которой и направлен вектор  $\mathbf{l}_1$ . Собственный вектор тензора (2.30), соответствующий собственному значению  $L_3$ , представляет собой линейную комбинацию  $(\mathbf{v}^3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2 - L_1 (L_1 - L_3) \mathbf{v}^3$  векторов  $\mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3$  (в этом легко убедиться путем непосредственной проверки, используя формулу (2.30)) и может быть записан в виде

$$\mathbf{l}_3 = [\mathbf{v}_1, L_1 L_3 \mathbf{v}_2 - \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2] / \|\mathbf{v}_1, L_1 L_3 \mathbf{v}_2 - \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2\|. \quad (2.33)$$

Формула (2.33) связывает  $\mathbf{l}_3$  с линией пересечения двух плоскостей, одна из которых – ОНП с нормалью  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{v}_1$ , другая – плоскость с нормалью  $(\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3 \mathbf{v}_2 - \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) / |\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_3 \mathbf{v}_2 - \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2|$ . Сам же тензор  $\mathbf{L}$  через собственные векторы (2.31), (2.33) выражается формулой

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{l}_1 \cdot \lambda^1 + L_1^{-1} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1] \cdot \lambda^2 + L_3 \mathbf{l}_3 \cdot \lambda^3,$$

где

$$\lambda^1 = L_1^2 [\mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1] \mathbf{l}_3] / |[\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]|^2, \quad \lambda^2 = L_1^2 [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1] / |[\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]|^2,$$

$$\lambda^3 = L_1^2 [\mathbf{l}_1, \mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]] / |[\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]|^2,$$

$$(\lambda^1, \mathbf{l}_1) = 1, \quad (\lambda^2, \mathbf{l}_1) = (\lambda^3, \mathbf{l}_1) = 0, \quad (\lambda^1, \mathbf{l}_3) = (\lambda^2, \mathbf{l}_3) = 0, \quad (\lambda^3, \mathbf{l}_3) = 1,$$

$$(\lambda^1, \mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]) = (\lambda^3, \mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]) = 0, \quad (\lambda^2, \mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]) = 1.$$

В этом нетрудно убедиться, учитывая равенства:

$$\mathbf{L}^{-1} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1] = [\mathbf{L} \mathbf{l}_3, \mathbf{L} \mathbf{l}_1] / \det \mathbf{L} = L_1^{-1} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1],$$

$$([\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1], \mathbf{E}^{-2} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]) = (\mathbf{L}^{-1} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1], \mathbf{L}^{-1} [\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]) = L_1^{-2} |[\mathbf{l}_3, \mathbf{l}_1]|^2.$$

Возвращаясь к обсуждению формул (2.28), (2.30), заметим, что орт  $\mathbf{v}_2$  может оказаться собственным вектором тензора  $\mathbf{E}$ , соответствующим какому-либо из собственных значений. Обозначим его для определенности через  $\mathbf{E}_s$ . В этом случае, следуя (2.23), будем иметь

$$\mathbf{L}^* \mathbf{v}_2 = L_1^{-1} \mathbf{E}_s^2 \mathbf{v}_2. \quad (2.34)$$

Равенство (2.34) говорит о том, что  $\mathbf{v}_2$  является нормалью к ОНП, соответствующей собственному значению  $L_1^{-1} \mathbf{E}_s^2$  тензора  $\mathbf{L}^*$ . Однако по условию (см. формулы (2.21)) тензор  $\mathbf{L}^*$  имеет двухкратно вырожденное собственное значение  $L_1$  и невырожденное собственное значение  $L_3$ . Условие это совместимо с равенством (2.34), если допустить, что  $L_1^{-1} \mathbf{E}_s^2 = L_1$ , т. е. при  $\mathbf{E}_s = L_1$ . Тогда неправомерным становится предположение о единственности собственного вектора  $\mathbf{N}_1$ , соответствующего собственному значению  $L_1$ . Действительно, тензор  $\mathbf{L}^*$  при выполнении условий

$$\mathbf{E}_s = L_1, \quad \mathbf{E} \mathbf{v}_2 = \mathbf{E}_s \mathbf{v}_2 \quad (2.35)$$

приводится к виду

$$\mathbf{L}^* = E_s \mathbf{I} + \left[ \left( |\mathbf{E}|/E_s^2 \right) - E_s \right] \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}^3, \quad (2.36)$$

следующему из (2.28), (2.35) и равенств  $\det \mathbf{L} = L_1^2 L_3 = |\mathbf{E}|$ ,  $\sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}^i = \mathbf{I}$ .

Вырожденному собственному значению тензора (2.36) отвечает уже не единственный собственный вектор  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{v}_1$ , а бесконечное множество собственных векторов, так как всякий вектор  $\mathbf{N}$ , образующий прямой угол с вектором  $\mathbf{v}^3$ , удовлетворяет уравнению  $\mathbf{L}^* \mathbf{N} = E_s \mathbf{N}$  и является поэтому собственным вектором тензора (2.36). Стало быть, вектор  $\mathbf{v}^3$  задает направление, выделяющее двумерное подпространство нормалей к ОНП, инвариантное относительно преобразования, описываемого тензором (2.36).

Аналогичным образом дело обстоит и с тензором

$$\mathbf{L} = E_s \mathbf{I} + \left[ \left( |\mathbf{E}|/E_s^2 \right) - E_s \right] \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v}_3, \quad (2.37)$$

всякий вектор  $\mathbf{l}$ , принадлежащий ОНП с нормалью  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{v}_3$ , является собственным вектором его, соответствующим двукратно вырожденному собственному значению.

Таким образом, между размерностью подпространства, инвариантного относительно преобразования (1.1) в случае двукратно вырожденного собственного значения тензора  $\mathbf{L}$ , и характеристическими составляющими симметричной части  $\mathbf{E}$  тензора  $\mathbf{L}$  имеется зависимость: инвариантное подпространство двумерно – плоскость, если выполняются условия, требуемые равенствами (2.35), и одномерно – прямая, в противном случае. Отсюда, в частности, следует, что инвариантное для тензора  $\mathbf{L}$  подподпространство, соответствующее вырожденному собственному значению  $L_1 = 1$ , двумерно лишь при условии

$$E_s = 1, \quad E \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2, \quad (2.38)$$

и только в этом случае тензор  $\mathbf{L}$  (см. формулу (2.37)) принимает вид

$\mathbf{L} = \mathbf{I} + (|\mathbf{E}| - 1) \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v}_3$ , характерный (см. формулу (2.7)) для деформации с инвариантной плоскостью.

## 5. Преобразование одномерного инвариантного подпространства в двухмерное. Дополнительная деформация

Собственные значения  $L_1, L_2, L_3$  тензора  $\mathbf{L} = \Omega \mathbf{E}$  могут варьироваться при заданном  $\mathbf{E}$  в пределах, устанавливаемых неравенствами (2.17), за счет изменения параметров  $\Psi$  и  $\lambda$  (см. формулу (2.4)) ортогональной составляющей  $\Omega$  при дополнительном ограничении  $L_1 L_2 L_3 = |\mathbf{E}|$ , которое связывает собственные значения между собой, исключая тем самым произвол в выборе одного из них. Легко видеть тогда, что предположение

$$L_1 = L_2 = 1 \quad (2.39a)$$

в отношении двух собственных значений тензора  $\mathbf{L}$  определяет третье

$$L_3 = |\mathbf{E}| \quad (2.39b)$$

и оправдывается, если

$$E_3 \leq 1 \leq E_1, \quad E_3 \leq |\mathbf{E}| \leq E_1 \quad \text{или} \quad E_1^{-1} \leq E_2 \leq E_3^{-1}, \quad (2.40)$$

где  $E_3$  и  $E_1$  – наименьшее и наибольшее собственные значения тензора  $\mathbf{E}$ .

Выделенность собственных значений (2.39) с геометрической точки зрения объясняется тем, что в этом случае преобразование (1.1), наряду с ориентационными инвариантами, т. е. ориентационно неизменными плоскостями  $\{\Pi_1\}$  с нормальными  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{v}_1$ ,  $\{\Pi_3\}$  с нормальными  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{v}_3$  и направлением  $\mathbf{l}_1 = \mathbf{v}_2$  линий  $\{\Gamma_{31}\}$  их пересечения, допускает существование скалярных инвариантов – расстояния между плоскостями  $\{\Pi_1\}$ , так как  $L_1 = h_1 / N_1 = 1$ , площади в плоскостях  $\{\Pi_3\}$ , так как  $L_3 = |\mathbf{E}|(\sigma_3 / \Sigma_3)^{-1} = |\mathbf{E}|$ , и расстояний в плоскостях  $\{\Pi_3\}$  в направлении  $\mathbf{l}_1$ , так как  $\mathbf{L} \mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_1$ . Сочетание этих всех инвариантов представляется необходимым для реализации структурной перестройки решеток посредством деформации с инвариантной плоскостью.

Условия (2.40) выполняются для решеток  $\gamma$  и  $\alpha$ , испытывающих взаимное превращение. В этом и других случаях, когда собственные значения тензора  $\mathbf{E}$  не расходятся с условиями (2.40), можно положить всегда, что  $L_1 = L_2 = 1, L_3 = |\mathbf{E}|$ , и задать тензор  $\mathbf{L}$  (см. формулу (2.30)) в виде

$$\mathbf{L} = \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2 + |\mathbf{E}| \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v}_3. \quad (2.41)$$

Иначе обстоит дело с условием (2.38), которое, как уже говорилось выше, для большинства решеток (включая решетки  $\gamma$  и  $\alpha$ ) не выполняется, так что двукратно вырожденному собственному значению тензора (2.41) соответствует одномерное инвариантное подпространство, а для существ-

ования инвариантной плоскости требуется двухмерное. Требованию этому можно удовлетворить, если деформационное преобразование (1.1) с тензором (2.41) дополнить еще одним однородным деформационным преобразованием, которое изменило бы размерность инвариантного подпространства, соответствующего вырожденному собственному значению.

Вид дополнительной деформации найти нетрудно. Рассмотрим для этого тройку некопланарных векторов  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , выразив их через векторы (2.29) в виде

$$\xi_1 = \xi_{11}v^1, \quad \xi_2 = \xi_{22}v^2, \quad \xi_3 = \sum_{i=1}^3 \xi_{3i}v^i, \quad (2.42)$$

где

$$\xi_{ki} = (\xi_k, v_i), \quad k, i = 1, 2, 3. \quad (2.43)$$

Первые два из векторов (2.42) принадлежат ориентационно неизменной плоскости  $\Pi_3$ , проходящей через начало  $O$ , и определяют в этой плоскости множество точек, образующих двухмерную решетку (рис. 2.3). Перенос последней на векторы, кратные  $\xi_3$ , порождает трехмерную решетку (обозначим ее  $\xi$ ), периоды которой зависят от значений параметров (2.43). Векторы (2.42) решетки  $\xi$  при деформации, характеризуемой тензором  $L$  (2.41), преобразуются по закону

$$L\xi_i = \rho_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.44)$$

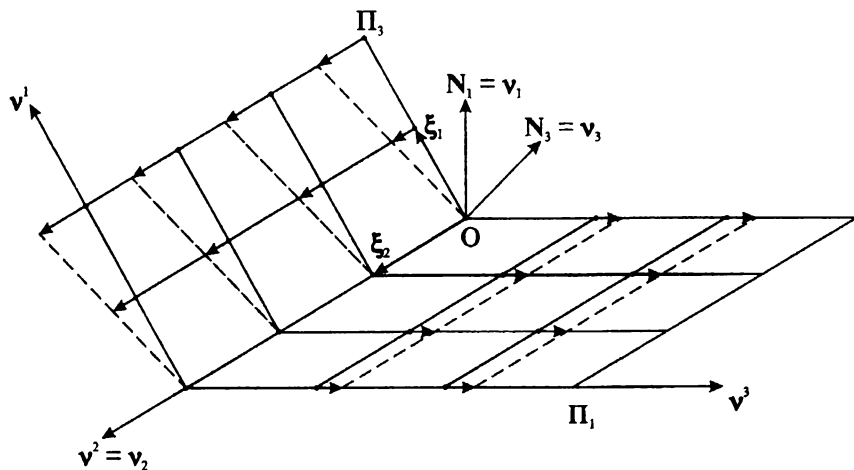


Рис. 2.3. К определению  $\xi$ -решетки

где

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \xi_1 + \xi_{22}^{-1} (\xi_1, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \xi_2, & \rho_2 &= \xi_2, \\ \rho_3 &= \xi_{31} \mathbf{v}^1 + (\xi_3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2 + \xi_{31} |\mathbf{E}| \mathbf{v}^3.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Из (2.44) следует, что двухмерная решетка в плоскости  $\Pi_3$ , построенная на векторах  $\xi_1, \xi_2$ , после деформации (2.44) самосовмещается, если эту деформацию дополнить деформацией  $\mathbf{D}$ , компенсирующей сдвиг в направлении  $\xi_2$  (см. рис. 2.3), т. е. деформацией, подчиняющейся уравнениям:

$$\mathbf{D}\mathbf{L}\xi_i = \rho'_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.46)$$

где

$$\rho'_1 = \xi_1, \quad \rho'_2 = \xi_2. \quad (2.47)$$

Тензор  $\mathbf{D}\mathbf{L}$ , удовлетворяющий уравнениям (2.46), имеет вид

$$\mathbf{D}\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \rho'_i \cdot \xi^i, \quad (2.48)$$

где  $\xi^1 = [\xi_2, \xi_3] / V$ ,  $\xi^2 = [\xi_3, \xi_1] / V$ ,  $\xi^3 = [\xi_1, \xi_2] / V$ ,  $V = (\xi_1, [\xi_2, \xi_3]) = \xi_{11} \xi_{22} \xi_{33} (v^1, [v^2, v^3])$ , или  $\xi^1 = [v_1 - (\xi_{31} / \xi_{33}) v_3] / \xi_{11}$ ,  $\xi^2 = [v_2 - (\xi_{32} / \xi_{33}) v_3] / \xi_{22}$ ,  $\xi^3 = v_3 / \xi_{33}$ .

Уравнение (2.48) можно упростить, исключая  $\rho'_1, \rho'_2$  с помощью (2.47) и учитывая тождество  $\sum_{i=1}^3 \xi_i \cdot \xi^i \equiv \mathbf{I}$ :

$$\mathbf{D}\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_3, \quad (2.49)$$

где  $\mathbf{d} = (\rho'_3 - \xi_3) / \xi_{33}$ .

Разрешая теперь уравнение (2.49) относительно  $\mathbf{D}$  и учитывая, что

$$\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_3 \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{L}^{-1} \mathbf{v}_3 = \mathbf{L}_3^{-1} \mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_3 = |\mathbf{E}|^{-1} \mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_3,$$

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I} - (v^1, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}_1 + [(|\mathbf{E}|^{-1} - 1) \mathbf{v}^3 - |\mathbf{E}|^{-1} (v^3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2] \cdot \mathbf{v}_3,$$

найдем  $\mathbf{D} = \mathbf{L}^{-1} + |\mathbf{E}|^{-1} \mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_3$  или  $\mathbf{D} = \mathbf{I} - (v^1, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{v}_1 + |\mathbf{E}|^{-1} [\mathbf{d} - (|\mathbf{E}| - 1) \mathbf{v}^3 - (v^3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2] \cdot \mathbf{v}_3$ .

Итак, дополнительная деформация  $\mathbf{D}$ , восстанавливающая после деформации (2.44) исходное расположение узлов решетки  $\xi$  в плоскости  $\Pi_3$ , определяется формулой

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} + \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{v}_3, \quad (2.50)$$



где вектор  $\mathbf{d}_1$  определяется однозначно при заданных  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{v}_3$  (см. формулы (2.26), (2.29)) и  $\mathbf{E}$ , а вектор  $\mathbf{d}_3$  – с точностью до произвольно выбираемого вектора  $\mathbf{d}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_1 &= -(\mathbf{v}^1, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2, \\ \mathbf{d}_3 &= |\mathbf{E}|^{-1} [\mathbf{d} - (|\mathbf{E}| - 1) \mathbf{v}^3 - (\mathbf{v}^3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2].\end{aligned}$$

Если узлы решетки  $\xi$  в плоскости  $\Pi_3$  совмещаются с узлами решетки  $\mathbf{X}$ , то деформация  $\mathbf{D}$  преобразует плоскость  $\Pi_3$  в инвариантную плоскость, превращая инвариантное для тензора  $\mathbf{L}$  (2.41) подпространство, соответствующее двукратно вырожденному собственному значению  $L_1 = 1$ , из одномерного в двухмерное.

Заметим, что в процедурном плане более удобным может оказаться другой подход, который основывается на уравнениях:

$$\mathbf{LD}'\xi_1 = \xi_1, \mathbf{LD}'\xi_2 = \xi_2, \mathbf{LD}'\xi_3 = \rho'^3, \quad (2.51)$$

выражающих тот факт, что преобразование одномерного инвариантного подпространства в двухмерное можно получить (и с тем же результатом, если  $\rho'^3 = \rho'_3$ ), деформируя решетку  $\xi$  в обратной последовательности, когда дополнительная деформация (деформация  $\mathbf{D}'$ ) выполняется первой. Тензор  $\mathbf{D}'$ , удовлетворяющий уравнениям (2.51), определяется формулой

$$\mathbf{D}' = \mathbf{I} + \mathbf{d}'_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{d}'_3 \cdot \mathbf{v}_3, \quad (2.52)$$

где  $\mathbf{d}'_1 = \mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}'_3 = \mathbf{d}' + (\mathbf{v}_1, \mathbf{d}') \mathbf{d}_1 + |\mathbf{E}|^{-1} [1 + (\mathbf{v}_3, \mathbf{d}')][(1 - |\mathbf{E}|) \mathbf{v}^3 - (\mathbf{v}^3, \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2) \mathbf{v}^2]$ ,  $\mathbf{d}' = (\rho'^3 - \xi_3) / \xi_{33}$ , а произведение  $\mathbf{LD}'$  – формулой  $\mathbf{LD}' = \mathbf{I} + \mathbf{d}' \cdot \mathbf{v}_3$ .

Различие между первым и вторым подходами заключается в том, что при первом подходе дополнительной деформации подвергается решетка  $\rho$ , задаваемая векторами (2.45), а при втором – решетка  $\xi$ , задаваемая векторами (2.42).

Следует отметить также, что дополнительная деформация, будь то деформация (2.50) или деформация (2.52), в общем случае (когда  $\mathbf{d}_3$  и  $\mathbf{d}'_3 \neq 0$ ) сдвигом не является и может быть представлена (не единственным образом) как последовательность двух сдвигов, например, на векторы  $\mathbf{d}_1$  и  $\mathbf{d}_3$  или  $\mathbf{d}'_1$  и  $\mathbf{d}'_3$ , в соответствии с разложением тензоров (2.50), (2.52) в произведение

$$\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{v}_3) (\mathbf{I} + \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{v}_1), \quad \mathbf{D}' = (\mathbf{I} + \mathbf{d}'_3 \cdot \mathbf{v}_3) (\mathbf{I} + \mathbf{d}'_1 \cdot \mathbf{v}_1).$$

### *Заключительные замечания*

В заключение представляется уместным обратить внимание на два обстоятельства.

Во-первых, сама возможность изменения размерности подпространства, инвариантного для тензора  $L$ , зависит только от взаимного расположения узлов в каждой из решеток  $X$  и  $g$ , так как определяется условиями (2.40), выражающими ограничения<sup>1</sup> только на характеристические составляющие собственно деформации  $E$ .

Во-вторых, формулы (2.41), (2.50), (2.52) определяют тензоры  $L$ ,  $D$ ,  $D'$  через нормали к ориентационно неизменным плоскостям, соответствующим собственным значениям (2.39), и приобретают поэтому практическое значение, если указан способ, позволяющий установить параметры ортогонального преобразования  $\Omega$ , обеспечивающего требуемые собственные значения и ориентационно неизменные плоскости.

---

<sup>1</sup> Напомним также об ограничении  $|E| \neq 1$ , которое принимается в настоящей работе.

### Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ЧАСТИ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИОННО НЕИЗМЕННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Предлагается процедура построения ортогональной части деформационного преобразования, основанная на использовании ориентационных инвариантов преобразования и решения задачи на собственные значения и собственные векторы тензора  $\mathbf{L}$ .

#### 1. Связь собственных значений тензора $\mathbf{L}$ с параметрами ортогонального преобразования $\Omega$

При заданном тензоре  $\mathbf{L}$  собственные значения  $L_1, L_2, L_3$  его находятся из решения характеристического уравнения

$$\mathbf{L}^3 + J_1 \mathbf{L}^2 + J_2 \mathbf{L} + J_3 \mathbf{I} = 0, \quad (3.1)$$

где  $J_1, J_2, J_3$  – базисные инварианты тензора  $\mathbf{L}$ :

$$J_1 = -\langle \mathbf{L} \rangle, \quad J_2 = \langle \mathbf{L}^{-1} \rangle \det \mathbf{L} = (\langle \mathbf{L} \rangle^2 - \langle \mathbf{L}^2 \rangle) / 2, \quad J_3 = -\det \mathbf{L}, \quad (3.2)$$

где  $\langle \dots \rangle \equiv \text{Sp}(\dots)$ .

Однако в задаче, рассматриваемой здесь, собственные значения тензора  $\mathbf{L}$  предполагаются известными (см. формулы (2.39)), а определению подлежит сам тензор  $\mathbf{L}$ , точнее, ортогональная составляющая  $\Omega$  его (см. формулы (1.9), (2.4)). Поэтому обратимся к равенствам:

$$J_1 = -L_1 - L_2 - L_3, \quad J_2 = L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1, \quad J_3 = -L_1 L_2 L_3, \quad (3.3)$$

$$J_1 = J_{10} \cos \Psi - (1 - \cos \Psi)(\lambda, \mathbf{E} \lambda), \quad (3.4a)$$

$$J_2 = J_{20} + (1 - \cos \Psi)(\lambda, \mathbf{E}(\mathbf{E} + J_{10} \mathbf{I}) \lambda),$$

$$J_3 = J_{30}, \quad (3.4b)$$

выражающим базисные инварианты (3.2) тензора  $\mathbf{L}$  через собственные значения  $L_1, L_2, L_3$ , параметры  $\Psi, \lambda$  ортогонального преобразования (2.4) и базисные инварианты  $J_{10} = -\langle \mathbf{E} \rangle$ ,  $J_{20} = (\langle \mathbf{E} \rangle^2 - \langle \mathbf{E}^2 \rangle) / 2$ ,  $J_{30} = -|\mathbf{E}|$  тензора  $\mathbf{E}$ . Равенства (3.3) устанавливают связь между корнями характеристического уравнения (3.1) и его коэффициентами, а равенства (3.4) получаются из (3.2), если  $\mathbf{L}$  в (3.2) исключить с помощью разложения (1.9) и воспользоваться затем формулой (2.4).

Равенства (3.3) при заданных  $L_1, L_2, L_3$  (см. формулы (2.39)) позволяют выразить базисные инварианты тензора  $L$  через  $|\mathbf{E}|$ :

$$J_1 = -2 - |\mathbf{E}|, \quad J_2 = 1 + 2|\mathbf{E}|, \quad J_3 = -|\mathbf{E}|. \quad (3.5)$$

Равенства (3.4а), дополненные условием нормировки

$$|\lambda| = 1, \quad (3.6)$$

можно рассматривать тогда как уравнения относительно  $\Psi$  и  $\lambda$ .

Представим вектор  $\lambda$  в виде разложения

$$\lambda = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (3.7)$$

по собственным векторам тензора  $\mathbf{E}$ , а равенства (3.4а) в виде

$$\begin{aligned} 1 - \cos \Psi &= (J_{10} - J_1) / [J_{10} + (\lambda, \mathbf{E} \lambda)], \\ 1 - \cos \Psi &= (J_2 - J_{20}) / (\lambda, \mathbf{E}(\mathbf{E} + J_{10} \mathbf{I}) \lambda), \end{aligned} \quad (3.8)$$

разрешенном относительно  $1 - \cos \Psi$ .

Исключая теперь  $1 - \cos \Psi$  в (3.8) и используя (3.7), придем к уравнению

$$\sum_{i=1}^3 (\lambda_i / a_i)^2 = 1, \quad (3.9)$$

где

$$a_i = \sqrt{J_{10}(J_2 - J_{20})} / \sqrt{E_i [J_{20} - J_2 + (J_{10} - J_1)(J_{10} + E_i)]}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) нетрудно разрешить относительно  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , но при этом необходимо учитывать соотношения между коэффициентами (3.10), которые зависят от соотношений между собственными значениями тензора  $\mathbf{E}$ . Условия (2.40) допускают несколько вариантов таких соотношений, каждое из которых накладывает свои ограничения на коэффициенты (3.10). Рассмотрим их последовательно.

## 2. Параметры ортогонального преобразования при дополнительных ограничениях на детерминант собственно деформации

Параметры ортогонального преобразования выражаются наиболее просто через характеристические составляющие собственно деформации  $\mathbf{E}$ , если преобразуемые решетки допускают существование дополнитель-

ных связей между детерминантом и собственными значениями тензора  $\mathbf{E}$ .  
Последнее имеет место в следующих случаях.

Во-первых, при

$$E_3 < E_2 < E_1 = |\mathbf{E}|. \quad (3.11a)$$

Тогда

$$a_1 = 1, \quad 1 < a_2 < a_3 \quad (3.11b)$$

и уравнение (3.9) удовлетворяется, если

$$\lambda = \eta \mathbf{e}_1, \quad (3.12)$$

где  $\eta = \pm 1$ . Первое из равенств (3.8) в этом случае дает

$$\cos \Psi = 2 / (E_2 + E_3) = 2 E_3 / (1 + E_3^2). \quad (3.13)$$

Во-вторых, при

$$E_3 < E_2 = E_1 = |\mathbf{E}|. \quad (3.14a)$$

Тогда

$$a_3 > 1, \quad a_1 = a_2 = 1, \quad (3.14b)$$

$$\lambda = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.15)$$

$$\cos \Psi = 2 / (|\mathbf{E}| + E_3) = 2 E_3 / (1 + E_3^2). \quad (3.16)$$

В третьих, при

$$E_3 = |\mathbf{E}| < E_2 < E_1. \quad (3.17a)$$

Тогда

$$a_3 = 1, \quad a_1 < a_2 < 1, \quad (3.17b)$$

$$\lambda = \eta \mathbf{e}_3, \quad \eta = \pm 1, \quad (3.18)$$

$$\cos \Psi = 2 / (E_1 + E_2) = 2 E_1 / (E_1^2 + 1). \quad (3.19)$$

В четвертых, при

$$E_3 = |\mathbf{E}| = E_2 < E_1. \quad (3.20a)$$

Тогда

$$a_1 < 1, \quad a_2 = a_3 = 1, \quad (3.20b)$$

$$\lambda = \cos \varphi \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (3.21)$$

$$\cos \Psi = 2 / (E_1 + |\mathbf{E}|) = 2 E_1 / (E_1^2 + 1). \quad (3.22)$$

Заметим, что соотношения (3.11а), (3.14а), (3.17а), (3.20а) выражают фактически условия существования метрических инвариантов – площадей и расстояний в плоскостях, представляющих собой ориентационные инварианты для тензора  $\mathbf{E}$ . Это и упрощает зависимость параметров ортогонального преобразования от собственно деформации  $\mathbf{E}$ .

### 3. Связь между параметрами ортогонального преобразования и характеристическими составляющими собственно деформации

Предположим теперь, что собственные значения тензора  $\mathbf{E}$  и коэффициенты (3.10), в свою очередь, подчиняются одному из следующих вариантов соотношений:

$$E_3 < |\mathbf{E}| < E_2 < E_1, \quad (3.23a)$$

$$a_1 < a_2 < 1, \quad a_3 > 1; \quad (3.23b)$$

$$E_3 < E_2 = |\mathbf{E}| < E_1, \quad (3.24a)$$

$$a_1 < 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 > 1; \quad (3.24b)$$

$$E_3 < E_2 < |\mathbf{E}| < E_1, \quad (3.25a)$$

$$a_1 < 1, \quad 1 < a_2 < a_3; \quad (3.25b)$$

$$E_3 < |\mathbf{E}| < E_2 = E_1, \quad (3.26a)$$

$$a_1 = a_2 < 1, \quad a_3 > 1. \quad (3.26b)$$

Уравнению (3.9) можно удовлетворить в этих случаях, полагая  $\lambda_1 = a_1 \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\lambda_2 = a_2 \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\lambda_3 = a_3 \cos \theta$ , где  $\theta$  – азимутальный, а  $\varphi$  – полярный углы. Вектор  $\lambda$  будет иметь единичную длину, если

$$(a_1^2 \cos^2 \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \theta + a_3^2 \cos^2 \theta = 1. \quad (3.27)$$

Разрешая (3.27) относительно  $\sin^2 \theta$ , найдем

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \theta_0 / \sqrt{1 - K \sin^2 \varphi}, \\ \cos \theta &= \eta \cos \theta_0 \sqrt{1 - K' \sin^2 \varphi} / \sqrt{1 - K \sin^2 \varphi}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $\eta = \pm 1$ ,

$$\sin \theta_0 = \sqrt{a_3^2 - 1} / \sqrt{a_3^2 - a_1^2}, \quad \cos \theta_0 = \sqrt{1 - a_1^2} / \sqrt{a_3^2 - a_1^2}, \quad (3.29)$$

$$K = (a_2^2 - a_1^2) / (a_3^2 - a_1^2), \quad K' = K / \cos^2 \theta_0, \quad (3.30)$$

причем  $0 < K < 1$  ( $K = 0$ ,  $K' = 0$ , если  $E_1 = E_2 > |\mathbf{E}|$ ),  $0 < K' \leq 1$ , если

$E_2 \geq |\mathbf{E}|$ ;  $K' > 1$ , если  $E_2 < |\mathbf{E}|$ .

Формулы (3.28) имеют смысл при любых  $\varphi$ , если  $E_2 > |\mathbf{E}|$ , и при  $\varphi$  из интервалов:

$$[0, \varphi_0], \quad [\pi - \varphi_0, \pi + \varphi_0], \quad [2\pi - \varphi_0, 2\pi], \quad (3.31)$$

если  $E_2 < |\mathbf{E}|$ , где  $\varphi_0 = \arcsin(1/\sqrt{K'})$ .

Итак, в случаях, выделенных соотношениями (3.23а), (3.24а), (3.25а), (3.26а), вектор  $\lambda$ , удовлетворяющий уравнению (3.9) и условию нормировки (3.6), является функцией  $\varphi$  и параметра  $\eta$ , принимающего значения  $(\pm 1)$ . В явном виде функцию эту можно выразить формулой

$$\lambda = A\omega\lambda_0. \quad (3.32)$$

Здесь  $\lambda_0 = \lambda|_{\varphi=0} = a_1 \sin \theta_0 \mathbf{e}_1 + \eta a_3 \cos \theta_0 \mathbf{e}_3$ ;  $\omega$  – поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $\mathbf{e}_3$ ,

$$\omega = \cos \varphi (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) + \sin \varphi (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3; \quad (3.33)$$

$A$  – симметричный тензор, перестановочный с тензором  $\mathbf{E}$ ,

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i, \quad (3.34)$$

где  $A_1, A_2, A_3$  – собственные значения тензора  $A$ ,

$$A_1 = 1/\sqrt{1 - K \sin^2 \varphi}, \quad A_2 = A_1 a_2 / a_1, \quad A_3 = A_1 \sqrt{1 - K' \sin^2 \varphi}. \quad (3.35)$$

Угол  $\varphi$  принимает значения из интервалов (3.31), если  $E_2 < |\mathbf{E}|$ , а при  $E_2 \geq |\mathbf{E}|$  допустимы любые значения  $\varphi$  из интервала  $[0, 2\pi)$ .

Разрешая теперь первое из равенств (3.8) относительно  $\cos \Psi$  и используя (3.32), придем к формуле

$$\cos \Psi = C, \quad (3.36)$$

где

$$C = C_0 (1 - C' \sin^2 \varphi) / (1 - C'' \sin^2 \varphi), \quad (3.37)$$

$$C_0 = (|J_1| - (\lambda_0, \mathbf{E} \lambda_0)) / (|J_{10}| - (\lambda_0, \mathbf{E} \lambda_0)), \quad (3.38)$$

$$C' = (K|J_1| - Q) / (|J_1| - (\lambda_0, \mathbf{E} \lambda_0)),$$

$$C'' = (K|J_{10}| - Q) / (|J_{10}| - (\lambda_0, \mathbf{E} \lambda_0)), \quad (3.39)$$

$$(\lambda_0, \mathbf{E} \lambda_0) = E_1 a_1^2 \sin^2 \theta_0 + E_3 a_3^2 \cos^2 \theta_0, \quad (3.40)$$

$$Q = (E_1 a_1^2 - E_2 a_2^2) \sin^2 \theta_0 + K E_3 a_3^2. \quad (3.41)$$

Значения функции (3.37) удовлетворяют неравенствам  $0 < C < 1$ .

Производная  $\partial C / \partial \varphi = C_0 (C'' - C') \sin 2\varphi / (1 - C'^2 \sin^2 \varphi)^2$  функции (3.37) по  $\varphi$  исчезает при  $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ , причем  $\partial^2 C / \partial \varphi^2|_{\varphi=0, \pi} = 2C_0 (C'' - C')$ ,  $\partial^2 C / \partial \varphi^2|_{\varphi=\pi/2, 3\pi/2} = -2C_0 (C'' - C') / (1 - C'^2)$ . Знак разности

$$C'' - C' = \frac{(|J_{10}| - |J_1|)\Delta}{(|J_{10}| - (\lambda_0, E\lambda_0))(|J_1| - (\lambda_0, E\lambda_0))} \quad (3.42)$$

определяется знаком сомножителя  $\Delta = Q - K(\lambda_0, E\lambda_0)$ , так как все остальные сомножители в (3.42) заведомо положительны. Используя (3.41), (3.30), (3.40), (3.10), нетрудно показать, что

$$\Delta = \frac{a_1^2 a_2^2 a_3^2 (|J_{10}| - |J_1|)(E_1 - E_2)(E_2 - E_3)(E_1 - E_3) \sin^2 \theta_0}{J_{10}(J_2 - J_{20})(a_3^2 - a_1^2)}$$

и является величиной положительной, поэтому  $C'' - C' > 0$ . Следовательно, при  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  функция (3.37) достигает наибольшего  $C_{\max} = C|_{\varphi=\pi/2, 3\pi/2} = C_0 (1 - C') / (1 - C'')$ , а при  $\varphi = 0, \pi$  — наименьшего  $C_{\min} = C|_{\varphi=0, \pi} = C_0$  значений. Поэтому  $C_{\min} \leq \cos \Psi \leq C_{\max}$ , если  $E_2 \geq |E|$ , и  $C_{\min} \leq \cos \Psi \leq C|_{\varphi=\varphi_0} = C_0 (K' - C') / (K' - C'')$ , если  $E_2 < |E|$ , так как в последнем случае  $\varphi$  принимает значения из интервалов (3.31), не содержащих  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ .

Наконец, пусть собственные значения тензора  $E$  удовлетворяют соотношениям

$$E_3 = E_2 < |E| < E_1. \quad (3.43)$$

Тогда

$$\begin{aligned} a_1 < 1, \quad a_2 = a_3 > 1, \\ \cos \Psi = C_0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2E_3(E_1 + E_3)} [2E_3(1 + E_1E_3) + (1 - E_3^2)(1 - E_1E_3)], \quad (3.45)$$

$$\lambda = \eta \sqrt{\Lambda'} e_1 + \sqrt{1 - \Lambda'} (\cos \varphi e_2 + \sin \varphi e_3), \quad (3.46)$$

где  $\eta = \pm 1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,



$$\Lambda' = \frac{(1 - E_3)^2 (E_1 E_3 - 1)}{2E_3 (E_1 - E_3)(1 - C_0)} \quad (3.47)$$

Формулы (3.32) – (3.37), (3.44) – (3.47) выражают в явном виде зависимость параметров ортогонального преобразования  $\Omega$  от характеристических составляющих тензора  $\mathbf{E}$  при условии, что собственные значения тензора  $\mathbf{E}$  не расходятся с требованиями (2.40).

Требованиям (2.40) отвечает, в частности, тензор (1.37), описывающий один из вариантов собственно деформации  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку. Вычисления, относящиеся к этому случаю, проводились с использованием данных о параметрах  $\gamma$ - и  $\alpha$ -решеток [34], которые представлены в табл. 3.1. В этой же таблице приводятся параметры  $\gamma$ - и  $\alpha$ -решеток, следующие из модели жестких атомных сфер<sup>1</sup> радиуса  $r$ . Результаты приведены в табл. 3.2 – 3.4.

Несколько проще обстоит дело, если собственно деформация одной решетки в другую при взаимном превращении  $\gamma$ - и  $\alpha$ -решеток реализуется по схеме Бейна. В этом случае удобно перейти к формулам

Таблица 3.1

Параметры  $\gamma$ - и  $\alpha$ -решеток

Номер набора параметров решеток	Система	$a_\gamma, \text{\AA}$	$a_\alpha, \text{\AA}$	$c_\alpha, \text{\AA}$
1	Fe	3,548	2,861	2,861
2	Fe – 1,4% C	3,620	2,8428	3,0234
3	Fe – 30,7% Ni – 0,28% C	3,602	2,863	2,903
4	Fe – 31% Ni	3,591	2,875	2,875
5	модельная	$2r\sqrt{2}$	$4r/\sqrt{3}$	$4r/\sqrt{3}$

<sup>1</sup> Перестройка  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку в модели жестких атомных сфер описывается в [35].

Таблица 3.2

Собственные значения и базисные инварианты тензора (1.37)

Номер набора параметров решеток	$E_1$	$E_2$	$E_3$	$J_{10}$	$J_{20}$	$J_{30}$	$E_1 E_3$
2	1,18114179	1,11058738	0,78530387	-3,07703304	3,11146495	-1,03013112	0,92755522
3	1,13977290	1,12406814	0,79483620	-3,05867724	3,08056520	-1,01833015	0,90593276

Таблица 3.3

Значения базисных инвариантов (3.5) и параметров (3.10), (3.29), (3.30) в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при собственнс. деформации (1.37)  $\gamma$ -решетки

Номер набора параметров решеток	$J_1$	$J_2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\sin \theta_0$	K
2	-3,03013112	3,06026224	0,97567645	0,99451646	1,12439782	0,91985693	0,11884525
3	-3,01833015	3,03666030	0,98545154	0,98973060	1,11769949	0,94665068	0,03038757

Таблица 3.4

Значения параметров (3.38) и углов  $\Psi_{\min} = \arccos C_{\max}$ ,  $\Psi_{\max} = \arccos C_0$  в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при собственнс. деформации (1.37)  $\gamma$ -решетки

Таблица 3.5

Значения параметров ортогонального преобразования в случае  $\gamma$  –  $\alpha$  перестройки при собственно деформации решеток по Бейну

Номер набора параметров решеток	$C_0$	$\arccos C_0, ^\circ$	$\sqrt{\Lambda}$	$\arccos \sqrt{\Lambda}, ^\circ$
1	0,98059444	11,305911	0,32744390	70,886296
2	0,98672094	9,3476630	0,33026067	70,715402
3	0,98181190	10,944393	0,33363705	70,510321
4	0,98033440	11,381658	0,33276476	70,563329
5	0,98141085	11,064772	0,30703417	72,119414

$$\lambda = \sqrt{1 - \Lambda} (\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi) + \eta \sqrt{\Lambda} \mathbf{e}_3, \quad (3.48)$$

$$\cos \Psi = C_0, \quad (3.49)$$

где

$$\Lambda = \frac{(1 - E_1 E_3)(E_1 - 1)^2}{2E_1(E_1 - E_3)(1 - C_0)},$$

$$C_0 = \frac{1}{2E_1(E_1 + E_3)} [2E_1(1 + E_1 E_3) - (E_1^2 - 1)(1 - E_1 E_3)]. \quad (3.50)$$

Причем в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки

$$E_1 = \kappa \sqrt{2}, \quad E_3 = \kappa \tau, \quad (3.51)$$

а в случае  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройки

$$E_1 = \frac{1}{\kappa \sqrt{2}}, \quad E_3 = \frac{1}{\kappa \tau}.$$

Следует однако заметить, что  $C_0$  и  $\Lambda$ , рассматриваемые как функции  $E_1$  и  $E_3$ , обладают свойством  $C_0(E_1^{-1}, E_3^{-1}) = C_0(E_1, E_3)$ ,  $\Lambda(E_1^{-1}, E_3^{-1}) =$

$= \Lambda(E_1, E_3)$ , т. е. не изменяются при замене  $E_1 \rightarrow E_1^{-1}$ ,  $E_3 \rightarrow E_3^{-1}$ , поэтому их значения для прямого и обратного превращений решеток  $\gamma$  и  $\alpha$  совпадают.

Представление о величине угла поворота  $\Psi = \arccos C_0$  и ориентации оси поворота (3.48) относительно оси симметрии четвертого порядка исходной решетки в рассматриваемом случае можно составить, обратившись к результатам расчетов, которые приводятся в табл. 3.5.

#### 4. Построение ориентационно неизменных плоскостей

Нормали к ориентационно неизменным плоскостям можно искать при известных параметрах ортогонального преобразования  $\Omega$  и собственных значениях тензора  $L$ , исходя из уравнения

$$(L^* - pI)N = 0, \quad (3.52)$$

где  $L = \Omega E$ ,  $p = L_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Уравнению (3.52) удовлетворяет вектор

$$X_{kn}(p) = [(L - pI)e_k, (L - pI)e_n], \quad (3.53)$$

где  $e_k, e_n$  – собственные векторы тензора  $E$ , выбираемые произвольно, но так, чтобы вектор  $X_{kn}$  отличался от нулевого. Действительно,  $(e_m, (L^* - pI)X_{kn}(p)) = ((L - pI)e_m, X_{kn}(p)) = (e_m, [e_k, e_n]) \det(L - pI) = 0$  при любом  $m = 1, 2, 3$ , в силу равенства  $\det(L - pI) = 0$ . Следовательно, решение уравнения (3.52) определяется одной из формул

$$N(p) = X_{kn}(p) / |X_{kn}(p)|, \quad (3.54)$$

где  $k, n = 1, 2; 2, 3; 3, 1$ .

Формулы (3.53), (3.54) решают задачу построения нормалей к плоскостям, ориентационно неизменным при деформации  $L$ . Заметим однако, что формула (3.53) не очень удобна в практическом отношении и ее следует преобразовать, выразив явно через ортогональное преобразование  $\Omega$  или через его параметры. Это дает

$$X_{kn} = F[e_k, e_n],$$

где  $F = (p^2 + pJ_1)I + pE\Omega^* + |\Omega|E^{-1}$ , или

$$X_{kn} = (e_k, F[e_k, e_n])e_k + (e_n, F[e_k, e_n])e_n + ([e_k, e_n], F[e_k, e_n])[e_k, e_n]. \quad (3.55)$$

При этом

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_k, \mathbf{F}[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n]) &= E_k \{ (E_n - p)(\lambda, \mathbf{e}_n) \sin \Psi + (E_n + p)(1 - \cos \Psi)(\lambda, \mathbf{e}_k)(\lambda, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n]) \}, \\(\mathbf{e}_n, \mathbf{F}[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n]) &= E_n \{ -(E_k - p)(\lambda, \mathbf{e}_k) \sin \Psi + (E_k + p)(1 - \cos \Psi)(\lambda, \mathbf{e}_n)(\lambda, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n]) \}, \\([\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n], \mathbf{F}[\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n]) &= p^2 + J_1 p + (p|\mathbf{E}|E_k^{-1}E_n^{-1} + E_k E_n)[\cos \Psi + \\&+ (1 - \cos \Psi)(\lambda, [\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n])^2].\end{aligned}$$

Переход к явным выражениям для нормалей осуществляется наиболее просто, если  $\lambda$  – собственный вектор тензора  $\mathbf{E}$ , соответствующий собственному значению его, равному  $|\mathbf{E}|$ . Именно так обстоит дело в случаях, предусмотренных соотношениями (3.11а), (3.14а), (3.17а), (3.20а). Рассмотрим эти случаи.

Пусть

$$E_3 < E_2 \leq E_1 = |\mathbf{E}|. \quad (3.56)$$

Тогда вектор  $\lambda$  лежит в плоскости собственных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  тензора  $\mathbf{E}$  (см. формулы (3.12), (3.15)),  $\mathbf{E}\lambda = |\mathbf{E}|\lambda$ ,  $\mathbf{L}^*\lambda = |\mathbf{E}|\lambda$ ,  $\mathbf{L}\lambda = |\mathbf{E}|\lambda$  и уравнению (3.52) при  $p = |\mathbf{E}|$  удовлетворяет вектор

$$\mathbf{N}|_{p=|\mathbf{E}|} = \lambda,$$

а при  $p = 1$  – вектор

$$\mathbf{N}|_{p=1} = [\lambda, (\mathbf{L} - \mathbf{I})\mathbf{e}_3] / \left| [\lambda, (\mathbf{L} - \mathbf{I})\mathbf{e}_3] \right| = (-E_3\mathbf{e}_3 + [\mathbf{e}_3, \lambda]) / \sqrt{1 + E_3^2}.$$

Таким образом, при собственно деформации  $\mathbf{E}$ , отвечающей соотношениям (3.56), ортогональное преобразование  $\Omega$  и составляющие (2.26), (2.29) тензора (2.41) определяются формулами:

$$\Omega = \mathbf{I} \cos \Psi + (1 - \cos \Psi)\lambda \cdot \lambda + \sin \Psi (\mathbf{e}_3 \cdot [\mathbf{e}_3, \lambda] - [\mathbf{e}_3, \lambda] \cdot \mathbf{e}_3),$$

где

$$\cos \Psi = 2E_3 / (1 + E_3^2), \quad \sin \Psi = (1 - E_3^2) / (1 + E_3^2);$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{N}_1 = (-E_3\mathbf{e}_3 + [\mathbf{e}_3, \lambda]) / \sqrt{1 + E_3^2}, \quad (3.57a)$$

$$\mathbf{v}_2 = [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1] / \left| [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1] \right| = (\mathbf{e}_3 + E_3[\mathbf{e}_3, \lambda]) / \sqrt{1 + E_3^2},$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{N}_3 = \lambda; \quad (3.57b)$$

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}^3 = \mathbf{v}_3;$$

$$\mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2 = (\mathbf{E}_3^{-1} - \mathbf{E}_3) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{E}_3^2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{E}_3^{-1} [\mathbf{e}_3, \lambda]) / \sqrt{1 + \mathbf{E}_3^2}.$$

Случаю  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}|$  в (3.57) соответствует

$$\lambda = \cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

а случаю  $\mathbf{E}_2 < \mathbf{E}_1 = |\mathbf{E}|$  —

$$\lambda = \eta \mathbf{e}_1, \quad \eta = \pm 1. \quad (3.58)$$

Если же собственно деформация  $\mathbf{E}$  отвечает соотношениям

$$\mathbf{E}_3 = |\mathbf{E}| \leq \mathbf{E}_2 < \mathbf{E}_1, \quad (3.59)$$

то

$$\Omega = \mathbf{I} \cos \Psi + (1 - \cos \Psi) \lambda \cdot \lambda + \sin \Psi ([\lambda, \mathbf{e}_1] \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \cdot [\lambda, \mathbf{e}_1]),$$

где

$$\cos \Psi = 2 \mathbf{E}_1 / (\mathbf{E}_1^2 + 1), \quad \sin \Psi = (\mathbf{E}_1^2 - 1) / (\mathbf{E}_1^2 + 1);$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{N}_1 = (-\mathbf{E}_1 \mathbf{e}_1 + [\lambda, \mathbf{e}_1]) / \sqrt{\mathbf{E}_1^2 + 1}, \quad (3.60a)$$

$$\mathbf{v}_2 = [\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1] / |[\mathbf{N}_3, \mathbf{N}_1]| = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_1 [\lambda, \mathbf{e}_1]) / \sqrt{\mathbf{E}_1^2 + 1},$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{N}_3 = \lambda; \quad (3.60b)$$

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}^3 = \mathbf{v}_3;$$

$$\mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2 = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1^{-1}) \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\mathbf{E}_1^2 \mathbf{e}_1 + \mathbf{E}_1^{-1} [\lambda, \mathbf{e}_1]) / \sqrt{\mathbf{E}_1^2 + 1}.$$

Случаю  $\mathbf{E}_3 = |\mathbf{E}| = \mathbf{E}_2$  в (3.60) соответствует

$$\lambda = \cos \varphi \mathbf{e}_2 + \sin \varphi \mathbf{e}_3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

а случаю  $\mathbf{E}_3 = |\mathbf{E}| < \mathbf{E}_2$  —

$$\lambda = \eta \mathbf{e}_3, \quad \eta = \pm 1. \quad (3.61)$$

Более громоздкие выражения для нормалей к ориентационно неизменным плоскостям получаются при собственно деформации  $\mathbf{E}$ , отвечающей какому-либо из соотношений (3.23a), (3.24a), (3.25a), (3.26a). Параметры ортогонального преобразования  $\Omega$  в этих случаях определяются формулами (3.32) – (3.37) и в формулах (3.54), (3.55) можно положить  $k = 1$ ,  $n = 2$ , что дает

$$\mathbf{N}(p) = \mathbf{X}_{12}(p) / |\mathbf{X}_{12}(p)|, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{X}_{12} = \mathbf{F}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_i, \mathbf{X}_{12}) \mathbf{e}_i ,$$

где

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1, \mathbf{X}_{12}) &= (\mathbf{e}_1, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = E_1 \left[ \eta a_1 a_3 (E_2 + p)(1 - C) \cos \varphi \sqrt{\cos^2 \theta_0 - K \sin^2 \varphi} + \right. \\ &\quad \left. + a_2 (E_2 - p) \sin \varphi \sqrt{(1 - C^2)(1 - K \sin^2 \varphi)} \right] \sin \theta_0 , \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{X}_{12}) &= (\mathbf{e}_2, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = E_2 \left[ \eta a_2 a_3 (E_1 + p)(1 - C) \sin \varphi \sqrt{\cos^2 \theta_0 - K \sin^2 \varphi} - \right. \\ &\quad \left. - a_1 (E_1 - p) \cos \varphi \sqrt{(1 - C^2)(1 - K \sin^2 \varphi)} \right] \sin \theta_0 , \\ (\mathbf{e}_3, \mathbf{X}_{12}) &= (\mathbf{e}_3, \mathbf{F}\mathbf{e}_3) = (1 - K \sin^2 \varphi) \{ p^2 + pJ_1 + (E_1 E_2 + pE_3) [a_3^2 - (a_3^2 - 1)C] \} - \\ &\quad - a_3^2 \sin^2 \theta_0 (E_1 E_2 + pE_3)(1 - C) , \end{aligned} \quad (3.63)$$

$\varphi$  принимает значения из интервала  $[0, 2\pi)$ , если  $E_2 > |\mathbf{E}|$ , а при  $E_2 < |\mathbf{E}|$  из интервалов (3.31).

## 5. Ориентационно неизменные плоскости в случае двукратного вырождения собственных значений тензора $\mathbf{E}$

Формулы для нормалей к ориентационно неизменным плоскостям заметно упрощаются, если

$$E_3 < |\mathbf{E}| < E_2 = E_1 . \quad (3.64)$$

Такие соотношения свойственны, например, собственным значениям тензора Бейна (1.38). Нормали  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}(p)|_{p=L_1=L_2=1}$ ,  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}(p)|_{p=L_1=|\mathbf{E}|}$  к ориентационно неизменным плоскостям в этом случае преобразуются к виду

$$\mathbf{N}_1 = \omega \mathbf{N}_{10}, \quad \mathbf{N}_3 = \omega \mathbf{N}_{30}, \quad (3.65)$$

где  $\omega$  – поворот на угол  $\varphi$  вокруг оси  $\mathbf{e}_3$  (см. формулу (3.33)), т. е. их поведение в зависимости от  $\varphi$  подчиняется вращательному закону;

$$\mathbf{N}_{10} = \eta \zeta_1 \mathbf{e}_1 - \varepsilon_1 \mathbf{e}_2 + \sigma_1 \mathbf{e}_3, \quad (3.66)$$

$$\zeta_1 = \sqrt{\frac{E_1(1-E_1E_3)}{2(E_1-E_3)}}, \quad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{E_1(1+E_1E_3)}{2(E_1+E_3)}}, \quad \sigma_1 = E_3 \sqrt{\frac{(E_1^2-1)}{(E_1^2-E_3^2)}}; \quad (3.67)$$

$$\mathbf{N}_{30} = \eta \zeta_3 \mathbf{e}_1 - \varepsilon_3 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3, \quad (3.68)$$

$$\zeta_3 = \frac{E_1-1}{E_1(1-E_3)} \sqrt{\frac{(E_1^2-1)(1+E_1E_3)}{2E_1(E_1-E_3)}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{E_1+1}{E_1(1-E_3)} \sqrt{\frac{(E_1^2-1)(1-E_1E_3)}{2E_1(E_1+E_3)}},$$

$$\sigma_3 = E_1^{-1} \sqrt{(1-E_1^2E_3^2)/(E_1^2-E_3^2)}, \quad (3.69)$$

где  $\eta = \pm 1$ .

Подстановка (3.65) в (2.26), (2.29) приводит к выражениям:

$$\mathbf{v}_1 = \omega \mathbf{v}_{10}, \quad \mathbf{v}_2 = \omega \mathbf{v}_{20}, \quad \mathbf{v}_3 = \omega \mathbf{v}_{30}, \quad (3.70a)$$

$$\mathbf{v}_1^1 = \omega \mathbf{v}_0^1, \quad \mathbf{v}_2^2 = \omega \mathbf{v}_0^2, \quad \mathbf{v}_3^3 = \omega \mathbf{v}_0^3, \quad (3.70b)$$

из которых следует, что поведение составляющих (2.26), (2.29) тензора (2.41) при изменении  $\varphi$  также подчиняется вращательному закону, где

$$\mathbf{v}_{10} = \mathbf{N}_{10}, \quad \mathbf{v}_{30} = \mathbf{N}_{30}, \quad (3.71)$$

$$\mathbf{v}_{20} = \mathbf{v}_0^2 = [\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|,$$

$$\mathbf{v}_0^1 = [\mathbf{N}_{30}, [\mathbf{N}_{10}, \mathbf{N}_{30}]] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|^2,$$

$$\mathbf{v}_0^3 = [\mathbf{N}_{10}, [\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|^2, \quad (3.72)$$

$$|[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]| = |\mathbf{E}| - 1 / [E_1(1-E_3)].$$

Переходя в (3.72) к явным выражениям (3.66), (3.68) для векторов  $\mathbf{N}_{10}$ ,  $\mathbf{N}_{30}$ , будем иметь

$$\mathbf{v}_{20} = \mathbf{v}_0^2 = -[(|\mathbf{E}|-1)/(|\mathbf{E}|-1)](E_1^{-1}\zeta_1\mathbf{e}_1 + \eta E_1^{-1}\varepsilon_1\mathbf{e}_2 + \eta E_3^{-1}\sigma_1\mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{v}_0^1 = [(1-E_3)/(|\mathbf{E}|-1)]\{-\eta[\varepsilon_1\sigma_3 + (E_1/E_3)\varepsilon_3\sigma_1]\mathbf{e}_1 +$$

$$+ [\zeta_1\sigma_3 - (E_1/E_3)\zeta_3\sigma_1]\mathbf{e}_2 + (\zeta_1\varepsilon_3 + \zeta_3\varepsilon_1)\mathbf{e}_3\},$$

$$\mathbf{v}_0^3 = [(1-E_3)/(|\mathbf{E}|-1)]\{\eta\varepsilon_1\sigma_1[(E_1/E_3)+1]\mathbf{e}_1 +$$

$$+ \zeta_1\sigma_1[(E_1/E_3)-1]\mathbf{e}_2 - 2\zeta_1\varepsilon_1\mathbf{e}_3\}.$$



Тензор  $\mathbf{E}$  с равными собственными значениями  $E_1$  и  $E_2$  (см. соотношения (3.64)) перестановочен с поворотом  $\omega$  (3.33). Учитывая это обстоятельство и используя формулы (3.70), тензор (2.41) можно выразить в виде произведения

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \omega \mathbf{L}_0 \omega^*, \quad \text{где} \\ \mathbf{L}_0 &= v_0^1 \cdot v_{10} + v_0^2 \cdot \mathbf{E}^2 v_{20} + |\mathbf{E}| v_0^3 \cdot v_{30}, \\ \mathbf{E}^2 &= E_1^2 \mathbf{I} + (E_3^2 - E_1^2) \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.73)$$

Аналогичным образом раскладывается в произведение  $\Omega = \omega \Omega_0 \omega^*$  и ортогональное преобразование  $\Omega$ , восстанавливающее ориентацию плоскостей с нормальными (3.65) после собственно деформации  $\mathbf{E}$ , где

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= C_0 \mathbf{I} + (1 - C_0) \lambda_0 \cdot \lambda_0 + \sqrt{1 - C_0^2} U_{\lambda_0}, \\ \lambda_0 &= \sqrt{1 - \Lambda} \mathbf{e}_1 + \eta \sqrt{\Lambda} \mathbf{e}_3.\end{aligned}\quad (3.74)$$

$C_0$  и  $\Lambda$  определяются формулами (3.50). Связь тензора (3.73) с преобразованием (3.74) устанавливается формулой

$$\mathbf{L}_0 = \Omega_0 \mathbf{E}.$$

Представление об ориентации векторов (3.71), (3.72) в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при собственно деформации  $\gamma$ -решетки по Бейну можно получить, обратившись к табл. 3.6 – 3.8.

Достаточно просто обстоит дело и в тех случаях, когда собственные значения тензора  $\mathbf{E}$  удовлетворяют соотношениям:

$$E_3 = E_2 < |\mathbf{E}| < E_1. \quad (3.75)$$

Тогда нормали  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{N}(\mathbf{p})|_{p=L_1=L_2=1}$ ,  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{N}(\mathbf{p})|_{p=L_3=|\mathbf{E}|}$  к ориентационно неизменным плоскостям выражаются формулами:

$$\mathbf{N}_1 = \omega_1 \mathbf{N}_{10}, \quad \mathbf{N}_3 = \omega_1 \mathbf{N}_{30}, \quad (3.76)$$

где  $\omega_1$  – поворот на угол  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ) вокруг оси  $\mathbf{e}_1$ ,

$$\omega_1 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3) \cos \varphi + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \sin \varphi;$$

$$\mathbf{N}_{10} = \sigma'_1 \mathbf{e}_1 + \eta \zeta'_1 \mathbf{e}_2 + \varepsilon'_1 \mathbf{e}_3, \quad (3.77)$$

Таблица 3.6  
Значения параметров (3.67), (3.69) в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при собственной деформации  
 $\gamma$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решеток	$\zeta_1$	$\varepsilon_1$	$\sigma_1$	$\zeta_3$	$\varepsilon_3$	$\sigma_3$
1	0,37055001	0,74981880	0,54814639	0,55317095	0,71513294	0,42730174
2	0,38219736	0,74168216	0,55121026	0,51816421	0,72126627	0,45965294
3	0,40766203	0,74499852	0,52800462	0,47664026	0,73601197	0,48072908
4	0,39955314	0,74725904	0,53100020	0,49559039	0,73308878	0,46580146
5	0,31245971	0,75434448	0,57735027	0,66480412	0,65805432	0,35355339

$$\sigma'_1 = E_1 \sqrt{\frac{1-E_3^2}{E_1^2-E_3^2}}, \quad \zeta'_1 = \sqrt{\frac{E_3(E_1 E_3 - 1)}{2(E_1 - E_3)}}, \quad \varepsilon'_1 = \sqrt{\frac{E_3(E_1 E_3 + 1)}{2(E_1 + E_3)}}, \quad (3.78)$$

$$N_{30} = \sigma'_3 \mathbf{e}_1 + \eta \zeta'_3 \mathbf{e}_2 + \varepsilon'_3 \mathbf{e}_3, \quad (3.79)$$

$$\sigma'_3 = E_3^{-1} \sqrt{(E_1^2 E_3^2 - 1)/(E_1^2 - E_3^2)}, \quad \zeta'_3 = \frac{1-E_3}{E_3(E_1-1)} \sqrt{\frac{(1-E_3^2)(E_1 E_3 + 1)}{2E_3(E_1 - E_3)}},$$

$$\varepsilon'_3 = \frac{1+E_3}{E_3(E_1-1)} \sqrt{\frac{(1-E_3^2)(E_1 E_3 - 1)}{2E_3(E_1 + E_3)}}, \quad (3.80)$$

$\eta = \pm 1$ . Подстановка (3.76) в (2.26), (2.29) дает

$$\begin{aligned} v_1 &= \omega_1 v_{10}, & v_2 &= \omega_1 v_{20}, & v_3 &= \omega_1 v_{30}, \\ v^1 &= \omega_1 v_0^1, & v^2 &= \omega_1 v_0^2, & v^3 &= \omega_1 v_0^3, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} v_{10} &= \mathbf{N}_{10}, & v_{30} &= \mathbf{N}_{30}, & v_{20} &= v_0^2 = [\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|, \\ v_0^1 &= [\mathbf{N}_{30}, [\mathbf{N}_{10}, \mathbf{N}_{30}]] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|^2, \\ v_0^3 &= [\mathbf{N}_{10}, [\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]] / |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]|^2, \\ |[\mathbf{N}_{30}, \mathbf{N}_{10}]| &= |1 - |\mathbf{E}|| / [E_3(E_1 - 1)], \end{aligned}$$

Таблица. 3.7

Компоненты вектора  $v_{20}$  в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при  
собственно деформации  $\gamma$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решеток	$(\mathbf{e}_1, v_{20})$	$(\mathbf{e}_2, v_{20})$	$(\mathbf{e}_3, v_{20})$
1	-0,32493582	-0,65751714 $\eta$	-0,67977049 $\eta$
2	-0,34413984	-0,66782873 $\eta$	-0,65997921 $\eta$
3	-0,36266665	-0,66276989 $\eta$	-0,65514042 $\eta$
4	-0,35288818	-0,65998450 $\eta$	-0,66324233 $\eta$
5	-0,27059805	-0,65328148 $\eta$	-0,70710678 $\eta$

Таблица 3.8

Компоненты векторов  $v_0^1, v_0^3$  в случае  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки при собственной деформации  $\gamma$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решетки	$(e_1, v_0^1)$	$(e_2, v_0^1)$	$(e_3, v_0^1)$	$(e_1, v_0^3)$	$(e_2, v_0^3)$	$(e_3, v_0^3)$
1	-3,48125519η	-1,07640922	2,70523953	3,94886221η	0,33481979	-2,21144713
2	-4,75629174η	-1,11645307	3,60985446	5,20956459η	0,37995474	-3,10095131
3	-9,52985517η	-1,64132013	6,93588447	9,97278961η	0,89950303	-6,43062410
4	-6,79836997η	-1,40758627	5,01784848	7,24747711η	0,66487324	-4,51773792
5	-1,66403416η	-0,89480957	1,46349455	2,17616030η	0,15465495	-0,97566304

или в явном виде

$$\begin{aligned}
 v_{20} = v_0^2 &= [(1-|E|)/|1-|E||](\eta E_1^{-1} \sigma'_1 e_1 + E_3^{-1} \zeta'_1 e_2 - \eta E_3^{-1} \varepsilon'_1 e_3), \\
 v_0^1 &= [(E_1-1)/(1-|E|)]\{(\zeta'_1 \varepsilon'_3 + \varepsilon'_1 \zeta'_3) e_1 - \eta [\varepsilon'_1 \sigma'_3 + (E_3/E_1) \sigma'_1 \varepsilon'_3] e_2 + \\
 &+ [(E_3/E_1) \sigma'_1 \zeta'_3 - \zeta'_1 \sigma'_3] e_3\}, \\
 v_0^3 &= [(E_1-1)/(1-|E|)]\{-2\zeta'_1 \varepsilon'_1 e_1 + \eta \varepsilon'_1 \sigma'_1 [1 + (E_3/E_1)] e_2 + \\
 &+ \sigma'_1 \zeta'_1 [1 - (E_3/E_1)] e_3\}.
 \end{aligned}$$

Тензоры (2.41) и ортогональное преобразование  $\Omega$  выражаются в виде произведений:

$$L = \omega_1 L_0 \omega_1^*, \quad \Omega = \omega_1 \Omega_0 \omega_1^*,$$

где

$$L_0 = v_0^1 \cdot v_{10} + v_0^2 \cdot E^2 v_{20} + |E| v_0^3 \cdot v_{30}, \quad (3.81)$$

$$E^2 = E_3^2 I + (E_1^2 - E_3^2) e_3 \cdot e_3,$$

$$\Omega_0 = C_0 I + (1 - C_0) \lambda_0 \cdot \lambda_0 + \sqrt{1 - C_0^2} U_{\lambda_0}, \quad (3.82)$$

$$\lambda_0 = \eta \sqrt{\Lambda'} e_1 + \sqrt{1 - \Lambda'} e_2,$$

$C_0$  и  $\Lambda'$  определяются формулами (3.45), (3.47). Связь тензора (3.81) с преобразованием (3.82) устанавливается формулой

$$L_0 = \Omega_0 E.$$

Соотношения (3.75) характерны для собственных значений

$$E_3 = E_2 = \frac{1}{\kappa \sqrt{2}}, \quad E_1 = \frac{1}{\kappa \tau}$$

тензора Бейна  $E = E_1 e_1 \cdot e_1 + E_3 (e_2 \cdot e_2 + e_3 \cdot e_3)$ , описывающего  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройку, где  $\kappa$  и  $\tau$  определяются формулами (1.24):

$$e_1 = e_3^\alpha, \quad e_2 = e_1^\alpha, \quad e_3 = e_2^\alpha,$$

где  $e_1^\alpha, e_2^\alpha, e_3^\alpha$  – правая тройка ортов, направленных в  $\alpha$ -решетке так, как это показано на рис. 1.2. Результаты вычислений, относящиеся к этому случаю, приведены в табл. 3.9 – 3.11.

Таблица 3.9  
Значения параметров (3.78), (3.80) в случае  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройки при собственной деформации  
 $\alpha$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решеток	$\sigma_1'$	$\zeta_1'$	$\varepsilon_1'$	$\sigma_3'$	$\zeta_3'$	$\varepsilon_3'$
1	0,67977038	0,32493596	0,65751715	0,55569082	0,50867733	0,65761273
2	0,66036009	0,34339356	0,66783643	0,56571486	0,48229553	0,66884813
3	0,65515994	0,36263032	0,66277704	0,60735477	0,43188521	0,66677974
4	0,66324225	0,35288328	0,65998451	0,59713948	0,44924426	0,66453292
5	0,70710682	0,27059791	0,65328147	0,47140419	0,62678359	0,62041935

Таблица 3.10

Компоненты векторов  $v_o^1, v_o^3$  в случае  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройки при собственной деформации  $\alpha$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решетки	$(e_1, v_o^1)$	$(e_2, v_o^1)$	$(e_3, v_o^1)$	$(e_1, v_o^3)$	$(e_2, v_o^3)$	$(e_3, v_o^3)$
1	2,8368712	-3,5268807η	0,33092573	-2,2114552	3,9488747η	0,33482081
2	3,6586676	-4,7085535η	0,30074345	-3,0412817	5,1243524η	0,37235322
3	7,0515507	-9,5584741η	0,23190465	-6,4191986	9,9564785η	0,89786643
4	5,1500949	-6,8450422η	0,00034470	-4,5177658	7,2475172η	0,66487692
5	1,5932496	-1,7058933η	0,51281673	-0,9756644	2,1761620η	0,15465513

Таблица 3.11

Компоненты вектора  $v_{20}$  в случае  $\alpha \rightarrow \gamma$  перестройки при собственно деформации  $\alpha$ -решетки по Бейну

Номер набора параметров решеток	$(e_1, v_{20})$	$(e_2, v_{20})$	$(e_3, v_{20})$
1	0,54814624 $\eta$	0,37055013	– 0,74981877 $\eta$
2	0,55177253 $\eta$	0,38136849	– 0,74169067 $\eta$
3	0,52803519 $\eta$	0,40762128	– 0,74499912 $\eta$
4	0,53100007 $\eta$	0,39955326	– 0,74725902 $\eta$
5	0,57735016 $\eta$	0,31245984	– 0,75434445 $\eta$

### Заключение к главе

Итак, все возможные варианты соотношений между собственными значениями собственно деформации решетки  $X$  в решетку  $\gamma$ , совместимые с ограничениями

$$E_3 < 1 < E_1, \quad E_3 \leq E_2 \leq E_1, \quad E_2 \neq 1, \quad E_1 \leq E_1 E_2 E_3 \leq E_1, \quad E_1 E_2 E_3 \neq 1, \quad (3.83)$$

рассмотрены. Для каждого из этих вариантов существуют и установлены ориентационно неизменные плоскости, отвечающие выделенным (см. гл. 2, разд. 5) собственным значениям тензора  $L$ :

$$L_1 = L_2 = 1, \quad L_3 = |E|. \quad (3.84)$$

Нормали к ориентационно неизменным плоскостям зависят, как правило, от двух параметров: параметра  $\eta = \pm 1$  и угла  $\varphi$  (исключение составляют случаи  $E_3 < E_2 < E_1 = |E|$ ,  $E_3 = |E| < E_2 < E_1$  (см. формулы (3.57), (3.58), (3.60), (3.61)), так как от  $\eta$  и  $\varphi$  зависит ориентация оси  $\lambda$  поворота  $\Omega$ , а в случаях (3.23а) – (3.25а) – и величина угла поворота.

Следовательно, ни взаимное расположение узлов в каждой из решеток  $X$  и  $\gamma$ , связанных деформацией (1.1), ни ограничения (3.84) на собственные значения тензора  $L$  однозначно не определяют ортогональное преобразование  $\Omega$  в (1.9) и сам тензор  $L$ .



## Глава 4. ОРИЕНТАЦИОННО НЕИЗМЕННЫЕ ПЛОСКОСТИ В СЛУЧАЕ $\gamma \rightarrow \alpha$ ПЕРЕСТРОЙКИ ПРИ СОБСТВЕННО ДЕФОРМАЦИИ $\gamma$ -РЕШЕТКИ ПО БЕЙНУ

Преобразование решетки  $X$  в решетку  $\gamma$  посредством однородной деформации (1.1) может оказаться совместимым с принципом идеального сопряжения фаз по инвариантной плоскости при собственно деформации  $E$  с собственными значениями  $E_1, E_2, E_3$ , отвечающими ограничениям (3.83), поскольку в этом случае выполняется одно из необходимых условий существования плоскости, общей для решеток превращающихся фаз, а именно: имеется семейство  $\{P_3(\eta, \varphi)\}$  плоскостей с нормальными векторами  $N_3 = N_3(\eta, \varphi)$ , в каждой из которых деформация  $E$  не изменяет площадь и расстояние вдоль одного из направлений. Таким образом, если допустить, что преобразование решетки  $X$  в решетку  $\gamma$  реализуется посредством деформации с инвариантной плоскостью, то эту плоскость следует искать в семействе ориентационно неизменных плоскостей  $\{P_3(\eta, \varphi)\}$ . Некоторые свидетельства в пользу этого утверждения можно получить на примере  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки. Для ее анализа здесь предлагается несколько иная параметризация ориентационных инвариантов деформационного преобразования, связанная с использованием углов, характеризующих отклонение плоскостей  $P_3(\eta, \varphi)$  от заданной плоскости. Такая параметризация представляется более удобной при классификации плоскостей  $P_3(\eta, \varphi)$  и сопоставлении с экспериментальными данными относительно габитусов  $\alpha$ -мартенсита.

### 1. Ограничения на параметры собственно деформации и ориентацию плоскостей $P_3$

Предположим, что собственно деформация  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку описывается тензором Бейна (1.38) с собственными векторами:

$$e_1 = (e_1' - e_2')/\sqrt{2}, \quad e_2 = (e_1' + e_2')/\sqrt{2}, \quad e_3 = e_3', \quad (4.1)$$

где  $e_1', e_2', e_3'$  – правая тройка ортов, направленных в  $\gamma$ -решетке вдоль осей симметрии четвертого порядка (см. рис. 1.3). Тогда нормали к

плоскостям семейства  $\{\Pi_3(\eta, \varphi)\}$  выражаются (см. (3.65), (3.33), (3.68)) формулой

$$\begin{aligned} N_3 = & \left\{ [(\eta\zeta_3 - \varepsilon_3) \cos \varphi + (\eta\zeta_3 + \varepsilon_3) \sin \varphi] / \sqrt{2} \right\} e_1^y + \\ & + \left\{ [(\eta\zeta_3 - \varepsilon_3) \sin \varphi - (\eta\zeta_3 + \varepsilon_3) \cos \varphi] / \sqrt{2} \right\} e_2^y + \sigma_3 e_3^y, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\eta = \pm 1$ ;  $\zeta_3, \varepsilon_3, \sigma_3$  определяются формулами (3.69). Вектор (4.2) образует минимальный угол с единичным вектором нормали

$$N = \sum_{i=1}^3 N_i e_i^y \quad (4.3)$$

к некоторой заданной плоскости  $N$  при угле  $\varphi$ , удовлетворяющем уравнению

$$d(N, N_3)/d\varphi = A_\eta \cos \varphi - B_\eta \sin \varphi = 0 \quad (4.4)$$

и неравенству  $d^2(N, N_3)/d\varphi^2 = -(A_\eta \sin \varphi + B_\eta \cos \varphi) < 0$ , где

$$\begin{aligned} A_\eta = & [(\eta\zeta_3 + \varepsilon_3)N_1 + (\eta\zeta_3 - \varepsilon_3)N_2] / \sqrt{2}, \\ B_\eta = & [(\eta\zeta_3 - \varepsilon_3)N_1 - (\eta\zeta_3 + \varepsilon_3)N_2] / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Уравнение (4.4) эквивалентно уравнению  $(N_3, [N, e_3^y]) = 0$  и, следовательно, удовлетворяется, если вектор  $N_3$  лежит в одной плоскости с векторами  $e_3^y$  и  $N$ . Это условие заведомо выполнимо при любом  $N$ , так что значение  $\Phi_{\min}$  наименьшего из углов  $\Phi$  между нормальными  $N_3$  и  $N$  можно выразить формулой

$$\Phi_{\min} = | \arccos \sigma_3 - \arccos N_3 |, \quad (4.6)$$

если выбор вектора  $N$  подчинить требованию  $N_3 \geq 0$ .

Формула (4.6) говорит о том, что минимальный угол  $(\Pi_3 \hat{N})_{\min}$  между плоскостями  $\Pi_3$  и  $N$ , который измеряется углом  $\Phi_{\min}$  между нормальными  $N_3$  и  $N$  к ним, тем меньше, чем меньше разность  $\sigma_3 - N_3$ , и может стать равным нулю, если выполнимо равенство

$$\sigma_3 = N_3. \quad (4.7)$$

Равенство (4.7), выраженное через собственные значения

$$E_1 = k\sqrt{2}, \quad E_3 = k\tau \quad (4.8)$$

тензора Бейна, приводит к уравнению, связывающему параметры  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $N_3$ , и, будучи разрешенным относительно  $\kappa$ , принимает вид

$$\kappa = \{2 [\tau^2 (1 - N_3^2) + 2 N_3^2]\}^{-1/4}. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) определяет  $\kappa$  как функцию  $\tau$  и  $N_3$ . Максимальное значение ее при заданном  $N_3$  из интервала  $0 \leq N_3 \leq 1$  реализуется при  $\tau = 1$ , поэтому

$$\kappa(N_3, \tau) \leq \kappa_{\max}(N_3) = [2 (1 + N_3^2)]^{-1/4} \leq 2^{-1/4}.$$

Снизу значения  $\kappa(N_3, \tau)$  ограничены требованием

$$|E| = 2\tau\kappa^3 > 1, \quad (4.10a)$$

так как  $\gamma \rightarrow \alpha$  переход в сплавах железа идет с увеличением удельного объема, или

$$\kappa > (2\tau)^{-1/3}. \quad (4.10b)$$

Следовательно,  $(2\tau)^{-1/3} < \kappa \leq 2^{-1/4} \approx 0,84$ . В качестве дополнительного требования примем<sup>1</sup>

$$E_1 > |E| \quad (4.11a)$$

или

$$\kappa < (\tau\sqrt{2})^{-1/2}, \quad (4.11b)$$

ограничиваясь рассмотрением  $\alpha$ -мартенсита массивных образцов сплавов железа. Тогда будем иметь

$$(2\tau)^{-1/3} < \kappa < (\tau\sqrt{2})^{-1/2}. \quad (4.12)$$

Отметим для сравнения, что область значений параметров  $\kappa$  и  $\tau$ , выделенная формально, представляет собой прямоугольник (рис. 4.1), вершинам  $\gamma$ ,  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\alpha'''$  которого соответствуют:  $a_\alpha = a_\gamma$  и  $c_\alpha = a_\gamma$ ,  $a_\alpha = a_\gamma/\sqrt{2}$  и  $c_\alpha = a_\gamma/\sqrt{2}$ ;  $a_\alpha = a_\gamma/\sqrt{2}$  и  $c_\alpha = a_\gamma$ ;  $a_\alpha = a_\gamma$  и  $c_\alpha = a_\gamma/\sqrt{2}$ , а область значений  $\kappa$  и  $\tau$ , отвечающих неравенствам (4.12), представляет собой криволинейный треугольник  $\alpha'_2\alpha'_1\alpha''$  без границ  $\alpha'_1\alpha''$  и  $\alpha'_2\alpha''$ , определяемых уравнениями  $\kappa = (\tau\sqrt{2})^{-1/2}$  и  $\kappa = (2\tau)^{-1/3}$  соответственно.

---

<sup>1</sup> Случай равенства  $E_1 = |E|$  может представлять интерес в связи с обсуждением  $\alpha$ -мартенсита тонких пленок.

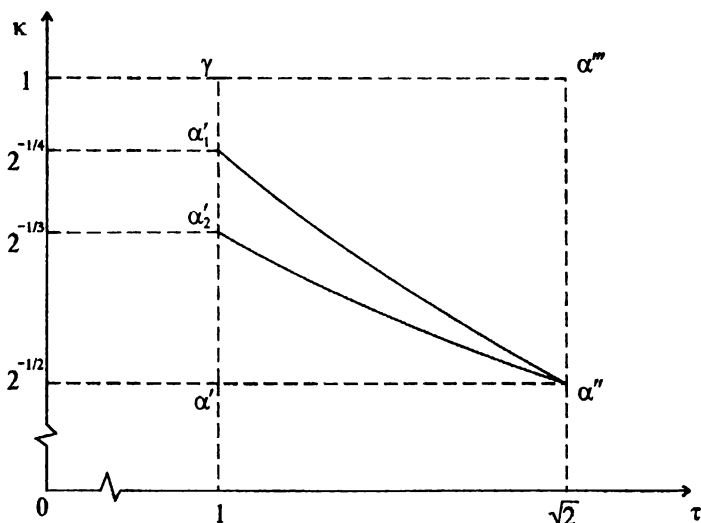


Рис. 4.1. Области значений параметров  $\kappa$  и  $\tau$

Подстановка (4.9) в (4.12) приводит к неравенствам

$$0 < N_3^2 < f(\tau), \quad (4.13)$$

где  $f(\tau) = \tau [(2\tau)^{1/3} - \tau] / (2 - \tau^2)$ , накладывающим ограничения на ориентацию плоскостей  $H$ , совместимых с плоскостью  $\Pi_3$ . Действительно, неравенства (4.13) эквивалентны неравенствам  $\pi/2 > \hat{N} e_3^Y > \arccos \sqrt{f(\tau)}$ , где  $\hat{N} e_3^Y$  – угол между векторами  $N$  и  $e_3^Y$ . Функция  $f(\tau)$  монотонно возрастает в интервале  $1 \leq \tau < \sqrt{2}$ , поскольку

$$df(\tau)/d\tau = (2^{4/3}/3)\tau^{1/3}(\tau^{2/3} + 2^{4/3})[(\tau^{2/3} - 2^{1/3}) / (2 - \tau^2)]^2 > 0$$

при положительных  $\tau$ , и стремится к максимальному значению  $(1/3)$  при  $\tau \rightarrow \sqrt{2}$ , так что

$$2^{1/3} - 1 \leq f(\tau) < 1/3 \text{ и } \arccos(1/\sqrt{3}) < \arccos \sqrt{f(\tau)} \leq \arccos \sqrt{2^{1/3} - 1}.$$

Следовательно,

$$\arccos(1/\sqrt{3}) < \hat{N} e_3^Y \leq \pi/2. \quad (4.14)$$

Заметим однако, что значения  $\tau$ , близкие к  $\sqrt{2}$ , не характерны для  $\alpha$ -мартенсита сплавов железа (см. табл. 3.1), поэтому нижняя граница углов  $N^{\gamma} e_3^{\gamma}$  не отличается заметно от

$$\arccos \sqrt{2^{1/3} - 1} \approx 59,3479^{\circ}; \quad (4.15)$$

при  $\tau = 1,1$ , например,  $\arccos \sqrt{f(\tau)} \approx 58,0963^{\circ}$ , что меньше угла (4.15) только на  $1,2516^{\circ}$ .

Неравенства (4.14) с учетом сделанных оговорок исключают возможность идеального сопряжения решеток  $\alpha$  и  $\gamma$  фаз в сплавах железа по плоскостям семейства  $\{111\}_{\gamma}$  и ставят под сомнение возможность образования кристаллов  $\alpha$ -мартенсита с габитусами  $\{111\}_{\gamma}$ . Вывод этот следует только из геометрии  $\gamma \rightarrow \alpha$  перестройки (см. неравенства (3.83), (4.10a)), поэтому можно сказать, что запрет на габитусы  $\{111\}_{\gamma}$  обусловлен расположением узлов в решетках  $\gamma$  и  $\alpha$ .

## 2. Ориентационное поведение плоскостей $\Pi_3$ , ориентационно близких к заданной плоскости при условии $(N, [N, e_3^{\gamma}]) = 0$

Для габитусных плоскостей кристаллов  $\alpha$ -мартенсита, наблюдаемых в системах Fe – C, Fe – Ni, характерны ориентировки, близкие (в зависимости от состава сплава) к  $\{557\}_{\gamma}$ ,  $\{225\}_{\gamma}$ ,  $\{259\}_{\gamma}$  –  $\{3\ 10\ 15\}_{\gamma}$ . Если же учесть выбор собственных векторов тензора Бейна (см. формулы (4.1)), то для сравнения с плоскостями  $\Pi_3$  ( $\eta$ ,  $\phi$ ) следует выделить габитусные плоскости, близкие к плоскостям типа

$$\{l h \underline{k}\}_{\gamma}, \quad \{l k \underline{h}\}_{\gamma}, \quad (4.16)$$

где  $h = \pm|h|$ ,  $k = \pm|k|$ ,  $l = \pm|l|$ ,  $|h| \leq |k| < |l|$ . Позиция и знак (положительный) подчеркнутого индекса остаются неизменными при всех перестановках индексов  $h$ ,  $k$ ,  $l$  и сменах их знаков, так как нормали  $N$  к остальным плоскостям заведомо не удовлетворяют неравенству  $[[e_3^{\gamma}, [N, e_3^{\gamma}]]]^2 > 1 - f(\tau)$ , где  $2/3 < 1 - f(\tau) \leq 2 - 2^{1/3} \approx 0,740079$ , следующему из неравенства (4.13) и условия нормировки  $|N|^2 = [[e_3^{\gamma}, [N, e_3^{\gamma}]]]^2 + N_3^2 = 1$ .

Значения минимальных углов между ориентационно неизменными плоскостями  $\Pi_3$  ( $\eta$ ,  $\phi$ ) и плоскостями семейств (4.16), вычисленные с использованием данных табл. 3.6, приводятся в табл. 4.1 и указывают на воз-

Таблица 4.1

Значения минимальных углов между плоскостями  $\Pi_3$   
и плоскостями семейств (4.16)

Номер набора параметров решеток	$\Phi_{\min}, ^\circ$					
	$\{75\bar{5}\}_\gamma$	$\{52\bar{2}\}_\gamma$	$\{95\bar{2}\}_\gamma$	$\{92\bar{5}\}_\gamma$	$\{15\ 10\ \bar{3}\}_\gamma$	$\{15\ 3\ \bar{10}\}_\gamma$
1	4,870	4,922	14,303	3,176	15,848	7,877
2	2,802	6,990	16,372	1,107	17,917	5,873
3	1,437	8,355	17,740	0,261	19,282	4,444
4	2,405	7,388	16,769	0,710	18,314	5,411
5	9,462	0,330	9,712	7,767	11,257	12,469

возможность максимального сближения плоскостей  $\Pi_3$  ( $\eta$ ,  $\varphi$ ) только с плоскостями типа  $\{lh\bar{k}\}_\gamma$ , что согласуется с существованием установленной экспериментально зависимости<sup>1</sup> между взаимной ориентацией габитусной плоскости кристалла  $\alpha$ -мартенсита и оси бейновского сжатия (оси  $[001]_\gamma$  в данном случае). Однако та же зависимость имеет место и для кристаллов  $\alpha$ -мартенсита с габитусами вблизи  $\{lh\bar{h}\}_\gamma$ . Вытекающие из этого ограничения можно выявить, обратившись непосредственно к формуле

$$N_3|_{\varphi=\varphi_N(\eta)} = \sqrt{(1-\sigma_3^2)/(1-N_3^2)} (N_1e_1^\gamma + N_2e_2^\gamma) + \sigma_3e_3^\gamma, \quad (4.17)$$

которая выражает нормаль к ориентационно неизменной плоскости  $\Pi_3$  ( $\eta$ ,  $\varphi_N(\eta)$ ), образующей минимальный угол с заданной плоскостью  $\Pi_1$ , и получается из формулы (4.2) в результате подстановки  $\varphi = \varphi_N(\eta)$  с учетом равенств:

$$\varphi_N(\eta) = \varphi_0 + 2\pi n \quad (0 \leq \varphi_N(\eta) < 2\pi), \quad \sin \varphi_N(\eta) = \sin \varphi_0,$$

$$\cos \varphi_N(\eta) = \cos \varphi_0,$$

$$\sin \varphi_0 = A_\eta / \sqrt{A_\eta^2 + B_\eta^2}, \quad \cos \varphi_0 = B_\eta / \sqrt{A_\eta^2 + B_\eta^2},$$

<sup>1</sup> Между ориентацией габитусной плоскости кристалла  $\alpha$ -мартенсита, наблюдаемого в сплавах железа, и ориентацией оси бейновского сжатия во всем объеме кристалла или в большей по объему двойниковой составляющей его (если кристалл двойникован) имеется закономерная связь, которая проявляется в том, что позиция среднего (по величине) индекса в обозначении наблюдаемой габитусной плоскости совпадает с позицией единицы в обозначении оси бейновского сжатия, сопоставляемой с соответствующим ориентировке кристалла вариантом собственно деформации  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку по схеме Бейна.

где  $n$  – целое число;  $A_\eta$ ,  $B_\eta$  определяются формулами (4.5).

Предположим, что  $H$  – плоскость  $(lhk)_\gamma$ , где  $0 < h \leq k < l$ . Тогда

$$N_1 = l/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}, N_2 = h/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}, N_3 = k/\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \quad (4.18)$$

и плоскость  $\Pi_3(\eta, \varphi_{(lhk)_\gamma}(\eta))$  будет максимально приближаться к плоскости  $(lhk)_\gamma$ , имея требуемую ориентацию по отношению к оси бейновского сжатия, если выполняются неравенства

$$N_2 \sqrt{(1 - \sigma_3^2)/(1 - N_3^2)} < \sigma_3 < N_1 \sqrt{(1 - \sigma_3^2)/(1 - N_3^2)}.$$

Разрешая их относительно  $\sigma_3$ , получим

$$\sigma_{30}^{(2)} < \sigma_3 < \sigma_{30}^{(1)}, \quad (4.19)$$

где

$$\sigma_{30}^{(i)} = N_i / \sqrt{N_i^2 + 1 - N_3^2}, \quad i = 1, 2. \quad (4.20)$$

Заметим, что плоскость  $\Pi_3(\eta, \varphi_N(\eta))$  образует с плоскостью  $H$  угол, не превышающий заданного угла  $\Phi_0$ , если

$$(N, N_3|_{\varphi_N(\eta)}) = \sqrt{(1 - N_3^2)(1 - \sigma_3^2)} + \sigma_3 N_3 \geq \cos \Phi_0. \quad (4.21)$$

Выбор возможных значений угла  $\Phi_0$  естественно ограничить требованием

$$\Phi_0 < N^\wedge e_3^T, \quad (4.22)$$

так как угол  $N^\wedge e_3^T$  в случае плоскостей  $(755)_\gamma$ ,  $(522)_\gamma$ ,  $(925)_\gamma$ ,  $(15 \ 3 \ 10)_\gamma$  достаточно велик (не меньше чем  $57^\circ$ ). Тогда неравенство (4.21) удовлетворяется, если

$$\sigma_{30}^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}, \quad (4.23)$$

где

$$\sigma_{30}^{(\pm)} = N_3 \cos \Phi_0 \pm \sqrt{1 - N_3^2} \sin \Phi_0. \quad (4.24)$$

Использование условия (4.21) в случае плоскости  $H$  типа  $(lhk)_\gamma$  предполагает дополнительно учет ограничений, накладываемых на  $\sigma_3$  неравенствами (4.19). Отметим в этой связи, что отношения порядка для границ интервалов (4.19), (4.23) зависят и от  $\Phi_0$ , и от самой плоскости  $(lhk)_\gamma$ , поскольку

$$\begin{aligned}\text{знак}(\sigma_{30}^{(2)} - \sigma_{30}^{(-)}) &= \text{знак}[\text{tg}(\Phi_0/2) - \text{tg} \Phi_2^{(-)}] = \text{знак}(\Phi_0 - 2\Phi_2^{(-)}), \\ \text{знак}(\sigma_{30}^{(1)} - \sigma_{30}^{(+)}) &= \text{знак}\{[\text{tg}(\Phi_0/2) - \text{tg} \Phi_1^{(-)}][\text{tg}(\Phi_0/2) - \text{tg} \Phi_1^{(+)}]\} = \\ &= \text{знак}[(\Phi_0 - 2\Phi_1^{(-)})(\Phi_0 - 2\Phi_1^{(+)})],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\Phi_2^{(-)} &= \arctg \left[ \frac{\sqrt{1 - N_3^2}}{\sigma_{30}^{(2)} + N_3} \left( \frac{\sigma_{30}^{(2)}}{N_2} - 1 \right) \right], \\ \Phi_1^{(\pm)} &= \arctg \left[ \frac{\sqrt{1 - N_3^2}}{\sigma_{30}^{(1)} + N_3} \left( 1 \pm \frac{\sigma_{30}^{(1)}}{N_1} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.25)$$

$$\Phi_1^{(-)} < \Phi_1^{(+)}.$$

Случай с углами  $\Phi_0$ , превышающими  $2\Phi_1^{(-)}$ , не представляет интереса (табл. 4.2).

Таблица 4.2

Значения углов (4.25)

Плоскость Н	$\Phi_2^{(-)}, ^\circ$	$\Phi_1^{(-)}, ^\circ$	$\Phi_1^{(+)}, ^\circ$
$(755)_\gamma$	0	4,4848	55,3484
$(522)_\gamma$	0	11,2507	58,3747
$(925)_\gamma$	8,1163	7,9187	53,6091
$(15\ 3\ 10)_\gamma$	11,0388	5,6324	51,1941

При

$$\Phi_0 < 2\Phi_1^{(-)} \quad (4.26)$$

справедливо неравенство  $\sigma_{30}^{(1)} - \sigma_{30}^{(+)} > 0$ , поэтому верхнюю границу интервала значений  $\sigma_3$  нужно положить равной  $\sigma_{30}^{(+)}$ . Что же касается нижней границы, то она зависит от плоскости Н, поскольку  $\sigma_{30}^{(2)} - \sigma_{30}^{(-)} > 0$  для плоскостей  $(lhh)_\gamma$ , где  $\sigma_{30}^{(2)} = N_2 = N_3$  и  $\sigma_{30}^{(2)} - \sigma_{30}^{(-)} < 0$  для плоскостей  $(lhk)_\gamma$ , где  $h < k$ , если  $\Phi_0 < 2\Phi_1^{(-)}$ .



Итак, плоскость  $\Pi_3 (\eta, \Phi_{(lhk)_\gamma}(\eta))$  отклоняется от плоскости  $(lhk)_\gamma$  на угол, не превышающий заданного угла  $\Phi_0 < 2\Phi_1^{(-)}$ , имея требуемую ориентацию по отношению к оси бейновского сжатия, если выполняются неравенства  $N_3 < \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}$  при  $h = k$  и неравенства  $\sigma_{30}^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}$  при  $h < k$ , где  $\Phi_1^{(-)}$ ,  $\sigma_{30}^{(\pm)}$  определяются формулами (4.25), (4.24).

### 3. Ориентационное поведение плоскостей $\Pi_3$ , ориентационно близких к заданной плоскости при условии $(N_3, [N, e_3^r]) \neq 0$

Взаимная ориентация плоскостей  $\Pi_3 (\eta, \Phi_N(\eta))$  и  $H$  может изменяться также за счет поворота плоскости  $\Pi_3 (\eta, \Phi_N(\eta))$  вокруг оси  $e_3^r$  на угол  $\delta\varphi$ . Плоскость  $\Pi_3 (\eta, \Phi_N(\eta) + \delta\varphi)$  образует с плоскостью  $H$  угол, не превышающий  $\Phi_0$ , если

$$(N, N_3|_{\Phi=\Phi_N(\eta)+\delta\varphi}) \geq \cos \Phi_0, \quad (4.27)$$

где

$$N_3|_{\Phi=\Phi_N(\eta)+\delta\varphi} = N_3|_{\Phi=\Phi_N(\eta)} \cos \delta\varphi + [e_3^r, N_3|_{\Phi=\Phi_N(\eta)}] \sin \delta\varphi + \sigma_3(1 - \cos \delta\varphi)e_3^r, \quad (4.28)$$

$$(N, N_3|_{\Phi=\Phi_N(\eta)+\delta\varphi}) = \sqrt{(1 - N_3^2)(1 - \sigma_3^2)} \cos \delta\varphi + \sigma_3 N_3.$$

Разрешая (4.27) относительно  $\sigma_3$  с учетом требования (4.22), будем иметь

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}, \quad (4.29)$$

$$-\delta\varphi_c \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_c, \quad (4.30)$$

где

$$\sigma_3^{(\pm)} = \left[ \pm (1 - N_3^2) \sqrt{\cos^2 \delta\varphi - \cos^2 \delta\varphi_c} \cos \delta\varphi + N_3 \cos \Phi_0 \right] / (N_3^2 \sin^2 \delta\varphi + \cos^2 \delta\varphi), \quad (4.31)$$

$$\delta\varphi_c = \arcsin \left( \sin \Phi_0 / \sqrt{1 - N_3^2} \right), \quad \delta\varphi_c > \Phi_0. \quad (4.32)$$

О поведении функций (4.31) в зависимости от  $\delta\varphi$  на отрезке (4.30) можно судить по графикам (рис. 4.2) и неравенствам

$$\sigma_{3C} \leq \sigma_3^{(+)} \leq \sigma_3^{(+)}|_{\delta\varphi=0} = \sigma_{30}^{(+)}, \quad \sigma_3^{(-)}|_{\delta\varphi=0} = \sigma_{30}^{(-)} \leq \sigma_3^{(-)} \leq \sigma_{3C},$$

где  $\sigma_{3C} = \sigma_3^{(-)}|_{\delta\varphi=\pm\delta\varphi_c} = \sigma_3^{(+)}|_{\delta\varphi=\pm\delta\varphi_c} = N_3 / \cos \Phi_0$ ,  $\sigma_{30}^{(\pm)}$  определяются формулами (4.24).

Ограничения на взаимную ориентацию плоскости  $\Pi_3$  ( $\eta$ ,  $\varphi_N(\eta) + \delta\varphi$ ) и оси  $\mathbf{e}_3^I$  бейновского сжатия можно выразить неравенствами

$$0 < (\mathbf{e}_2^I, \mathbf{N}_3) < (\mathbf{e}_3^I, \mathbf{N}_3) < (\mathbf{e}_1^I, \mathbf{N}_3), \quad (4.33a)$$

полагая для определенности, что компоненты вектора нормали  $\mathbf{N}$  к плоскости  $\Pi$  отвечают требованиям  $0 < N_2 \leq N_3 < N_1$  (см. формулы (4.18)). Подставляя (4.28) в (4.33a) и разрешая полученные неравенства относительно  $\sigma_3$ , найдем

$$0 < \sigma_3^{(2)} < \sigma_3 < \sigma_3^{(1)}, \quad (4.33b)$$

где

$$\sigma_3^{(i)} = \tilde{N}_i / \sqrt{\tilde{N}_i^2 + 1 - N_3^2}, \quad i = 1, 2, \quad (4.34)$$

$$\tilde{N}_1 = N_1 \cos \delta\varphi - N_2 \sin \delta\varphi, \quad \tilde{N}_2 = N_1 \sin \delta\varphi + N_2 \cos \delta\varphi. \quad (4.35)$$

Неравенства (4.33) имеют смысл только при положительных  $\tilde{N}_1$ ,  $\tilde{N}_2$ ,  $\sigma_3^{(1)} - \sigma_3^{(2)}$ . Условие это накладывает ограничения на  $\delta\varphi$ , а именно:

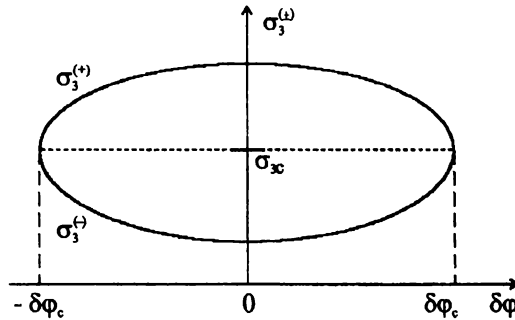


Рис. 4.2. Зависимость  $\sigma_3^{(\pm)}$  от  $\delta\varphi$

$$-\delta\varphi_0 < \delta\varphi < \delta\varphi', \quad (4.36)$$

где  $\delta\varphi_0 = \arctg(N_2/N_1)$ ,  $\delta\varphi' = \arctg[(N_1 - N_2)/(N_1 + N_2)]$ . Тогда возникает вопрос о совместности неравенств (4.36) и (4.30), который следует решать с учетом соотношений:

$$\delta\varphi_0 \leq \delta\varphi_c, \text{ если } \Phi_0 \geq \arcsin N_2; \quad \delta\varphi_0 > \delta\varphi_c, \text{ если } \Phi_0 < \arcsin N_2;$$

$$\delta\varphi' \leq \delta\varphi_c, \text{ если } \Phi_0 \geq \arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}];$$

$$\delta\varphi' > \delta\varphi_c, \text{ если } \Phi_0 < \arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}].$$

Значения углов  $\arcsin N_2$  и  $\arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}]$  достаточно велики (табл. 4.3). Ограничимся поэтому углами  $\Phi_0$ , отвечающими требованию

$$\Phi_0 < \arcsin N_2, \arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}]. \quad (4.37)$$

Тогда неравенства (4.36) удовлетворяются заведомо, если удовлетворяются неравенства (4.30), и остается рассмотреть вопрос о совместности неравенств (4.29), (4.33).

Поведение функций (4.34) в зависимости от  $\delta\varphi$  на отрезке (4.30) иллюстрируется графиками, представленными на рис. 4.3. Взаимное расположение кривых, изображающих функции (4.31), (4.34), конкретизируем, полагая, что значения  $\Phi_0$  отвечают требованию и (4.26), и (4.37). Тогда  $\sigma_3^{(1)}|_{\delta\varphi=-\delta\varphi_c} > \sigma_3^{(1)}|_{\delta\varphi=0} = \sigma_{30}^{(1)} > \sigma_{30}^{(+)} > \sigma_{3c}$ ,  $\sigma_3^{(1)}|_{\delta\varphi=\delta\varphi_c} > \sigma_{3c}$ , поэтому кривая  $\sigma_3 = \sigma_3^{(1)}(\delta\varphi)$  может касаться или пересекать дважды кривую  $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(\delta\varphi)$  только при положительных  $\delta\varphi$ . О положении кривой  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(\delta\varphi)$  в случае плоскостей  $(lhh)_\gamma$  можно судить с большей определенностью, так как из неравенств  $\sigma_3^{(2)}|_{\delta\varphi=-\delta\varphi_c} < \sigma_3^{(2)}|_{\delta\varphi=0} = \sigma_{30}^{(2)} < \sigma_{3c}$ ,  $\sigma_{30}^{(2)} > \sigma_{30}^{(-)}$ ,  $\sigma_3^{(2)}|_{\delta\varphi=\delta\varphi_c} > \sigma_{3c}$  следует, что кривая  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(\delta\varphi)$  заведомо

Таблица 4.3

Значения углов  $\arcsin N_2$  и  $\arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}]$   
в случае плоскости Н типа  $(lhh)_\gamma$

Плоскость Н	$\arcsin N_2, ^\circ$	$\arcsin [(N_1 - N_2)/\sqrt{2}], ^\circ$
$(755)_\gamma$	30,1668	8,1713
$(522)_\gamma$	20,3745	21,6709
$(925)_\gamma$	10,9932	28,1603
$(15 \ 3 \ 10)_\gamma$	9,4480	27,6645

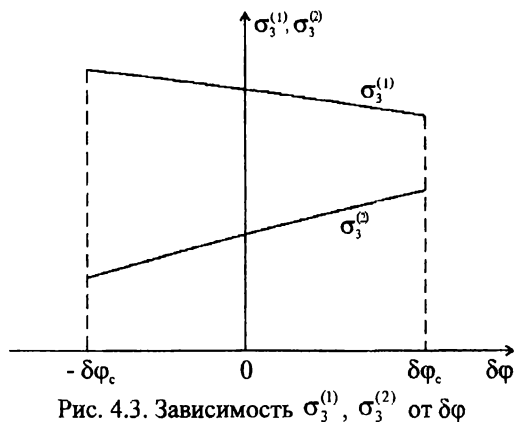


Рис. 4.3. Зависимость  $\sigma_3^{(1)}$ ,  $\sigma_3^{(2)}$  от  $\delta\phi$

пересекает кривую  $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(\delta\phi)$  при отрицательных  $\delta\phi$  и кривую  $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(\delta\phi)$  при положительных  $\delta\phi$ . Различные варианты взаимного расположения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(1)}(\delta\phi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(\delta\phi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(\delta\phi)$ , соответствующие этому случаю, изображены на рис. 4.4.

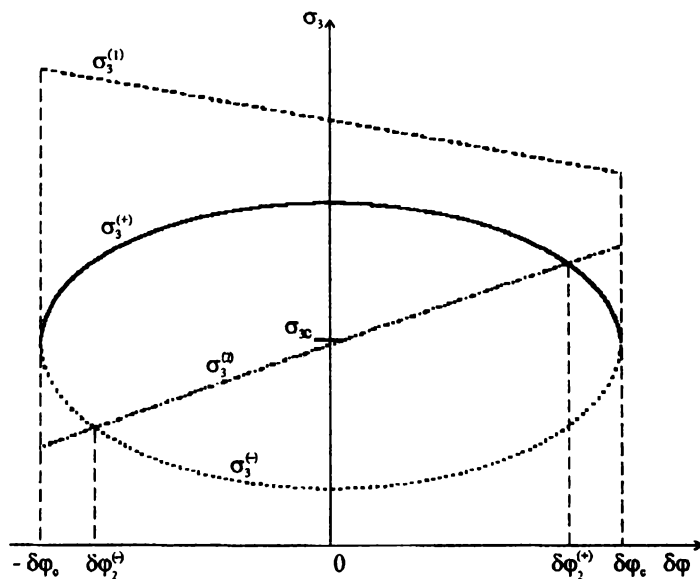
Если же  $H$  – плоскость типа  $(lhk)_\gamma$ ,  $h < k$ , то  $\sigma_3^{(2)}|_{\delta\phi=-\delta\phi_c} < \sigma_3^{(2)}|_{\delta\phi=0} = \sigma_3^{(2)} < \sigma_3^{(-)} < \sigma_{3c}$ ,  $\sigma_3^{(2)}|_{\delta\phi=\delta\phi_c} < \sigma_{3c}$ , поэтому касания или пересечения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(\delta\phi)$  и  $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(\delta\phi)$  следует ожидать только при положительных  $\delta\phi$ . Возможные варианты взаимного расположения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(1)}(\delta\phi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(\delta\phi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(\delta\phi)$  в этом случае изображены на рис. 4.5 и 4.6.

Итак, плоскость  $\Pi_3(\eta, \phi_{(lhk)_\gamma}(\eta) + \delta\phi)$  отклоняется от плоскости  $(lhk)_\gamma$  на угол, не превышающий заданного угла  $\Phi_0$ , имея требуемую ориентацию по отношению к оси бейновского сжатия, если  $\sigma_3$  изменяется в конечных пределах. Пределы эти определяются из решения системы неравенств (4.29), (4.33б) на отрезке (4.30).

Приведем возможные варианты решений, основываясь на графиках, изображающих зависимость функций  $\sigma_3^{(1)}$ ,  $\sigma_3^{(2)}$ ,  $\sigma_3^{(\pm)}$  от  $\delta\phi$  (см. рис. 4.4 – 4.6) на отрезке (4.30).

1. Пусть  $h = k$ , т. е.  $H$  – плоскость  $(755)_\gamma$  или  $(522)_\gamma$ . Тогда возможны два варианта решений.

a



b

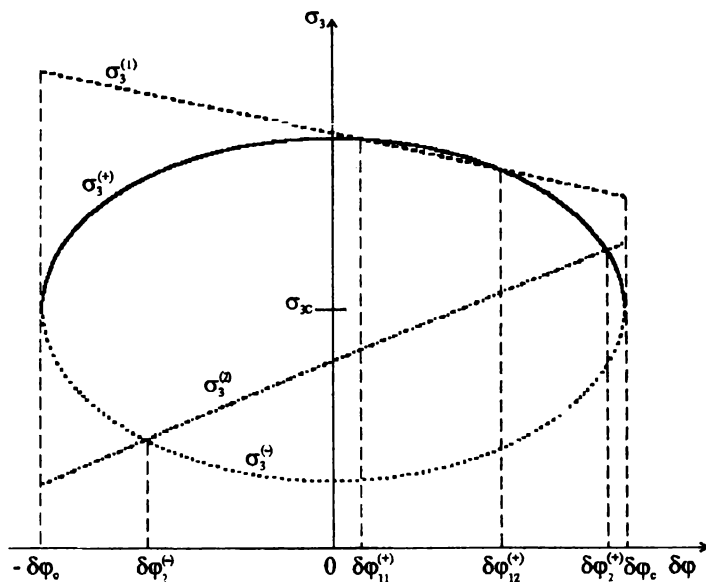
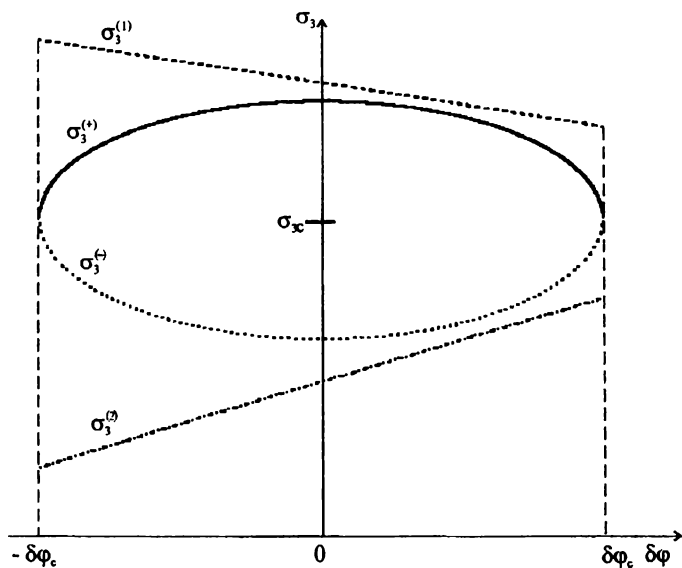


Рис. 4.4. Возможные варианты взаимного расположения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(\delta\varphi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(i)}(\delta\varphi)$ ,  $i = 1, 2$  в случае плоскостей Н типа  $(lh\hbar)_\gamma$

a



б

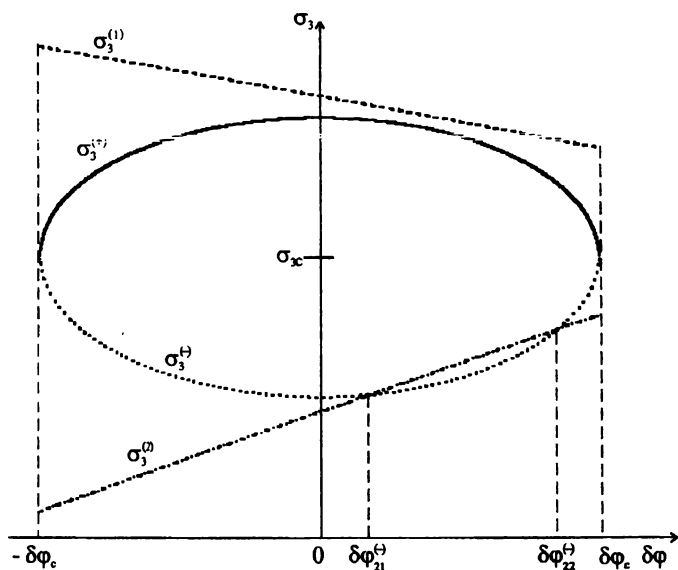
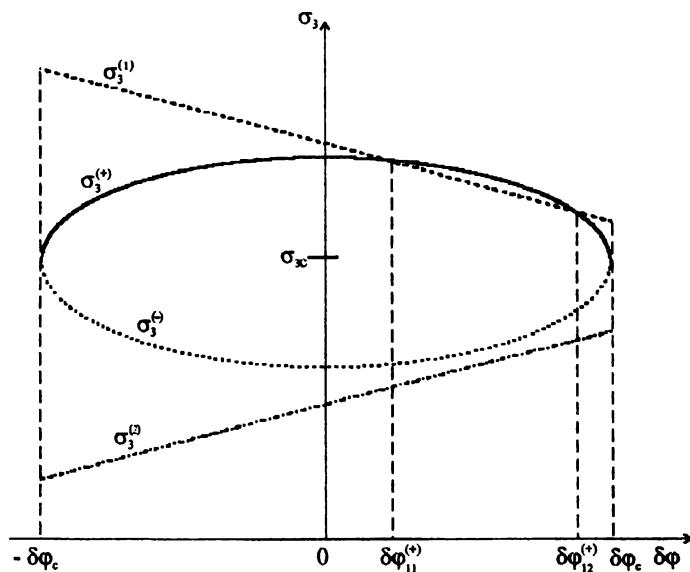


Рис. 4.5. Возможные варианты взаимного расположения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(\delta\varphi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(i)}(\delta\varphi)$ ,  $i = 1, 2$  в случае плоскостей Н типа  $(lhk)_\gamma$ ,  $h < k$

a



б

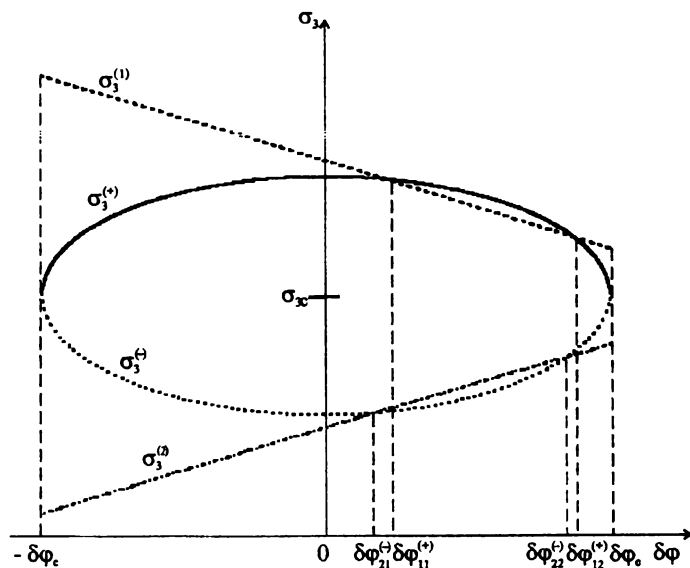


Рис. 4.6. Возможные варианты взаимного расположения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(\delta\varphi)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(i)}(\delta\varphi)$ ,  $i = 1, 2$  в случае плоскостей Н типа  $(lhk)_\gamma$ ,  $h < k$

Во-первых,

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } -\delta\varphi_c \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_2^{(-)} \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(+)},$$

если уравнение

$$\sigma_3^{(+)}(\delta\varphi) - \sigma_3^{(1)}(\delta\varphi) = 0 \quad (4.38)$$

не имеет (см. рис. 4.4, а) вещественных корней в интервале

$$0 < \delta\varphi < \delta\varphi_c, \quad (4.39)$$

где  $\delta\varphi_2^{(\pm)}$  – вещественные корни уравнений

$$\sigma_3^{(\pm)}(\delta\varphi) - \sigma_3^{(2)}(\delta\varphi) = 0, \quad (4.40)$$

принадлежащие отрезку (4.30).

Во-вторых,

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } -\delta\varphi_c \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_2^{(-)} \leq \delta\varphi < \delta\varphi_{11}^{(+)},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 < \sigma_3^{(1)} \text{ при } \delta\varphi_{11}^{(+)} \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_{12}^{(+)},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_{12}^{(+)} < \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(+)},$$

если уравнение (4.38) имеет (см. рис. 4.4, б) вещественные корни  $\delta\varphi = \delta\varphi_{11}^{(+)}$ ,  $\delta\varphi = \delta\varphi_{12}^{(+)}$ , где  $\delta\varphi_{11}^{(+)} \leq \delta\varphi_{12}^{(+)}$ , принадлежащие интервалу (4.39).

Выбор задаваемого угла  $\Phi_0$  ограничен сверху углами:  $8,17^\circ$  для плоскости (755)<sub>γ</sub> и  $20,37^\circ$  для плоскости (522)<sub>γ</sub>, отвечающими (см. табл. 4.2 и 4.3) требованиям (4.26), (4.37).

2. Пусть  $h < k$ , т. е. Н – плоскость (925)<sub>γ</sub> или (15 3 10)<sub>γ</sub>. Тогда возможны четыре варианта решения системы неравенств (4.29), (4.33б) на отрезке (4.30).

Во-первых,

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)},$$

если уравнения (4.38) и (4.40) не имеют (см. рис. 4.5, а) вещественных корней в интервале (4.39).



Во-вторых,

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } -\delta\varphi_c \leq \delta\varphi < \delta\varphi_{21}^{(-)},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_{21}^{(-)} \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_{22}^{(-)},$$

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_{22}^{(-)} < \delta\varphi \leq \delta\varphi_c,$$

если уравнение (4.38) не имеет вещественных корней в интервале (4.39), а уравнение

$$\sigma_3^{(-)}(\delta\varphi) - \sigma_3^{(2)}(\delta\varphi) = 0 \quad (4.41)$$

имеет (см. рис. 4.5, б) вещественные корни  $\delta\varphi = \delta\varphi_{21}^{(-)}$ ,  $\delta\varphi = \delta\varphi_{22}^{(-)}$ , где  $\delta\varphi_{21}^{(-)} \leq \delta\varphi_{22}^{(-)}$ , в этом интервале.

В третьих,

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } -\delta\varphi_c \leq \delta\varphi < \delta\varphi_{11}^{(+)},$$

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 < \sigma_3^{(1)} \text{ при } \delta\varphi_{11}^{(+)} \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_{12}^{(+)},$$

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \delta\varphi_{12}^{(+)} < \delta\varphi \leq \delta\varphi_c,$$

если в интервале (4.39) уравнение (4.38) имеет (см. рис. 4.6, а) вещественные корни  $\delta\varphi = \delta\varphi_{11}^{(+)}$ ,  $\delta\varphi = \delta\varphi_{12}^{(+)}$ , а уравнение (4.41) вещественных корней не имеет.

Наконец, в-четвертых, если в интервале (4.39) вещественные корни имеет (см. рис. 4.6, б) и уравнение (4.38), и уравнение (4.41), то

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } -\delta\varphi_c \leq \delta\varphi < \min\{\delta\varphi_{21}^{(-)}, \delta\varphi_{11}^{(+)}\},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \min\{\delta\varphi_{21}^{(-)}, \delta\varphi_{11}^{(+)}\} \leq \delta\varphi < \max\{\delta\varphi_{21}^{(-)}, \delta\varphi_{11}^{(+)}\},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 < \sigma_3^{(1)} \text{ при } \max\{\delta\varphi_{21}^{(-)}, \delta\varphi_{11}^{(+)}\} \leq \delta\varphi \leq \min\{\delta\varphi_{12}^{(+)}, \delta\varphi_{22}^{(-)}\},$$

$$\sigma_3^{(2)} < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \min\{\delta\varphi_{12}^{(+)}, \delta\varphi_{22}^{(-)}\} < \delta\varphi \leq \max\{\delta\varphi_{12}^{(+)}, \delta\varphi_{22}^{(-)}\},$$

$$\sigma_3^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)} \text{ при } \max\{\delta\varphi_{12}^{(+)}, \delta\varphi_{22}^{(-)}\} < \delta\varphi \leq \delta\varphi_c,$$

где предполагается, что  $\delta\varphi_{21}^{(-)} \leq \delta\varphi_{22}^{(-)}$ ,  $\delta\varphi_{11}^{(+)} \leq \delta\varphi_{12}^{(+)}$ ; символы  $\min\{a, b\}$  и  $\max\{a, b\}$  означают наименьшее и наибольшее из чисел  $a, b$  соответственно.

Выбор угла  $\Phi_0$  ограничен сверху углами:  $10,99^\circ$  для плоскости (925)<sub>γ</sub> и  $9,45^\circ$  для плоскости (15 3 10)<sub>γ</sub>, отвечающими (см. табл. 4.2 и 4.3) требованиям (4.26), (4.37).

Легко видеть, что максимальное значение  $\sigma_3^{\max}$  параметра  $\sigma_3$  во всех случаях одинаково:  $\sigma_3^{\max} = \sigma_{30}^{(+)}$ , а минимальное —  $\sigma_3^{\min}$  зависит от плоско-

сти Н. Так,

$$\sigma_3^{\min} = \sigma_3^{(-)} \big|_{\delta\varphi=\delta\varphi_2^{(-)}} = \sigma_3^{(2)} \big|_{\delta\varphi=\delta\varphi_2^{(-)}}, \quad (4.42a)$$

т. е.

$$\sigma_{30}^{(-)} < \sigma_3^{\min} < \sigma_{30}^{(2)} = N_2, \quad (4.42b)$$

поэтому  $\sigma_3^{(-)} \big|_{\delta\varphi=\delta\varphi_2^{(-)}} < \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}$ , если Н – плоскость  $(755)_\gamma$  или  $(522)_\gamma$ . Если же Н – плоскость  $(925)_\gamma$  или  $(15 \ 3 \ 10)_\gamma$ , то  $\sigma_3^{\min} = \sigma_{30}^{(-)}$  и  $\sigma_{30}^{(-)} \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}$ .

#### 4. Пересечение множеств допустимых значений параметра $\sigma_3$

Значения величин  $\sigma_{30}^{(+)}(H, \Phi_0)$  и  $\sigma_{30}^{(-)}(H, \Phi_0)$  удовлетворяют неравенствам.

$$\sigma_{30}^{(+)}(H_1, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(+)}(H_2, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(+)}(H_3, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(+)}(H_4, \Phi_0),$$

$$\sigma_{30}^{(-)}(H_1, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(-)}(H_2, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(-)}(H_3, \Phi_0) < \sigma_{30}^{(-)}(H_4, \Phi_0)$$

при любом значении угла  $\Phi_0$ , отвечающем требованиям (4.26), (4.37) для каждой из плоскостей

$$H_1 - (522)_\gamma, H_2 - (925)_\gamma, H_3 - (755)_\gamma, H_4 = (15 \ 3 \ 10)_\gamma, \quad (4.43)$$

где

$$\sigma_{30}^{(\pm)}(H_i, \Phi_0) = \sin(\alpha_i \pm \Phi_0), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.44)$$

$$\alpha_1 = \arcsin(2/\sqrt{33}) \approx 20,37^\circ, \alpha_2 = \arcsin(5/\sqrt{110}) \approx 28,47^\circ,$$

$$\alpha_3 = \arcsin(5/\sqrt{99}) \approx 30,17^\circ, \alpha_4 = \arcsin(10/\sqrt{334}) \approx 33,17^\circ. \quad (4.45)$$

Если же величины  $\sigma_{30}^{(\pm)}(H, \Phi_0)$  рассматривать совместно, то отношения порядка для их значений оказываются зависящими от  $\Phi_0$ . Зависимость эта выделяет следующие значения углов:

$$\Phi_{32} = (\alpha_3 - \alpha_2) / 2 \approx 0,84732778^\circ, \Phi_{43} = (\alpha_4 - \alpha_3) / 2 \approx 1,50333803^\circ,$$

$$\Phi_{42} = (\alpha_4 - \alpha_2) / 2 \approx 2,35066581^\circ, \Phi_{21} = (\alpha_2 - \alpha_1) / 2 \approx 4,04880362^\circ, \quad (4.46)$$

$$\Phi_{31} = (\alpha_3 - \alpha_1) / 2 \approx 4,89613140^\circ, \Phi_{41} = (\alpha_4 - \alpha_1) / 2 \approx 6,39946943^\circ$$

и иллюстрируется схемами (рис. 4.7 – 4.11). Использование их упрощает анализ возможностей пересечения множеств

$$\Sigma_i(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_3^{(-)}(H_i, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_i, \Phi_0) \}, \quad i = 2, 4, \quad (4.47a)$$

$$\Sigma_i(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_3^{(2)}(H_i, \delta\varphi_2^{(-)}) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_i, \Phi_0) \}, \quad i = 1, 3, \quad (4.47b)$$

допустимых значений  $\sigma_3$  при различных  $\Phi_0$ , где  $\delta\varphi_2^{(-)} = \delta\varphi_2^{(-)}(H_i, \Phi_0)$  – корень уравнения

$$\sigma_3^{(-)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi) = \sigma_3^{(2)}(H_i, \delta\varphi), \quad (4.48)$$

принадлежащий интервалу

$$-\delta\varphi_c(H_i, \Phi_0) < \delta\varphi < 0, \quad (4.49)$$

$$\delta\varphi_c(H_i, \Phi_0) = \arcsin(\sin \Phi_0 / \cos \alpha_i), \quad (4.50)$$

$$\sigma_3^{(\pm)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi) = \left[ \pm \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - \cos^2 \alpha_i \sin^2 \delta\varphi \cos \alpha_i \cos \delta\varphi} + \sin \alpha_i \cos \Phi_0 \right] / (\cos^2 \delta\varphi + \sin^2 \alpha_i \sin^2 \delta\varphi), \quad (4.51a)$$

$$\sigma_3^{(2)}(H_i, \delta\varphi) = 1 / \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2(\beta_i + \delta\varphi)}, \quad (4.51b)$$

$$\beta_1 = \arcsin(2 / \sqrt{29}) \approx 21,80^\circ, \quad \beta_2 = \arcsin(2 / \sqrt{85}) \approx 12,53^\circ,$$

$$\beta_3 = \arcsin(5 / \sqrt{74}) \approx 35,54^\circ, \quad \beta_4 = \arcsin(1 / \sqrt{26}) \approx 11,31^\circ \quad (4.51b)$$

Так, из рис. 4.7 следует, что множества (4.47) не пересекаются, если  $0 \leq \Phi_0 \leq \Phi_{32}$ , поскольку нижняя граница множества  $\Sigma_3$  превосходит (см. неравенства (4.42))  $\sigma_{30}^{(-)}(H_3, \Phi_0)$ .

Пересечение множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$  при  $\Phi_0$  из интервала

$$\Phi_{32} < \Phi_0 < \Phi_{43} \quad (4.52)$$

может иметь место (см. рис. 4.7), если в интервале (4.52) найдется значение (обозначим его  $\Phi'_{32}$ ) угла  $\Phi_0$ , удовлетворяющее системе уравнений

$$\sigma_{30}^{(+)}(H_2, \Phi_0) = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi), \quad (4.53a)$$

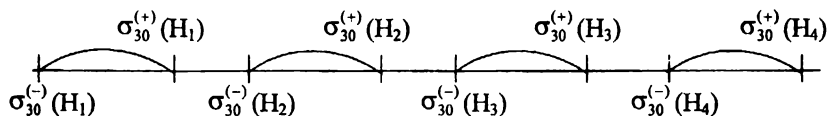
$$\sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) = \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \quad (4.53b)$$

и ограничениям

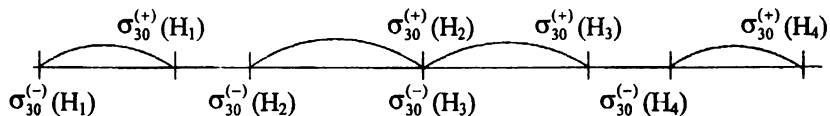
$$-\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) < \delta\varphi < 0, \quad (4.53b)$$

(рис. 4.12), где  $\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) = \arcsin(\sin \Phi_0 / \cos \alpha_3)$  (см. формулу (4.50)).

*a*



*б*



*в*

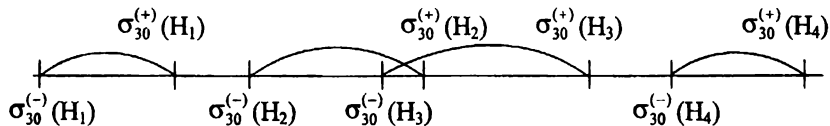
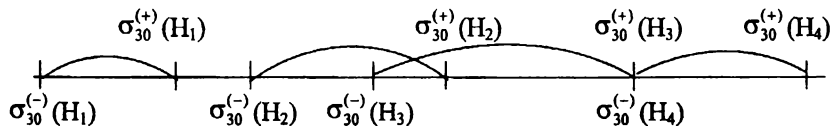


Рис. 4.7. К пересечению множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$  :  
*a* –  $\Phi_0 < \Phi_{32}$ ; *б* –  $\Phi_0 = \Phi_{32}$ ; *в* –  $\Phi_{32} < \Phi_0 < \Phi_{43}$

*a*



*б*

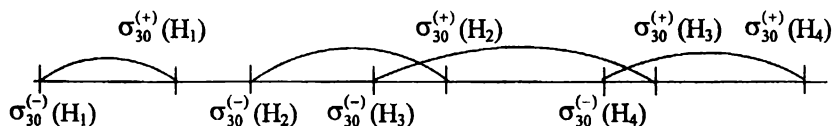
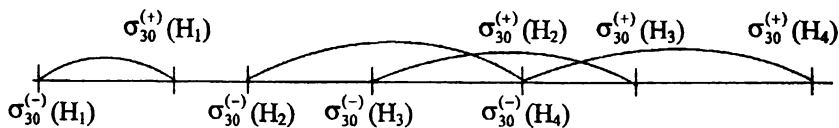


Рис. 4.8. К пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_3$  :  
*a* –  $\Phi_0 = \Phi_{43}$ ; *б* –  $\Phi_{43} < \Phi_0 < \Phi_{42}$

*a*



*б*

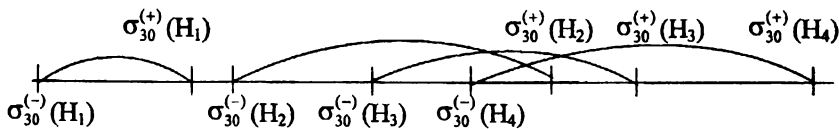
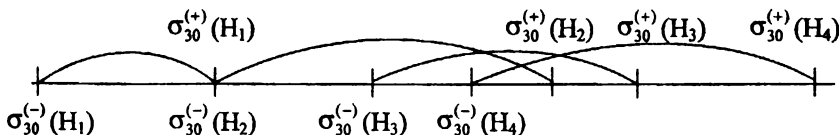


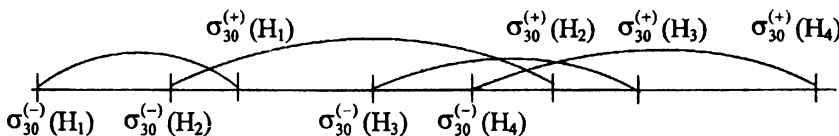
Рис. 4.9. К пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_2$  :

*a* –  $\Phi_0 = \Phi_{42}$ ; *б* –  $\Phi_{42} < \Phi_0 < \Phi_{21}$

*a*



*б*



*в*

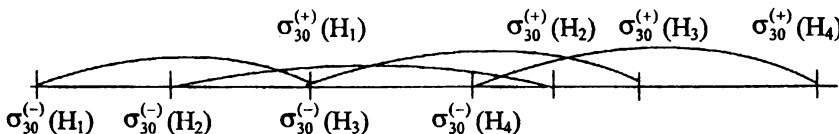
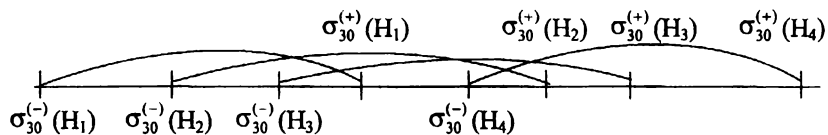


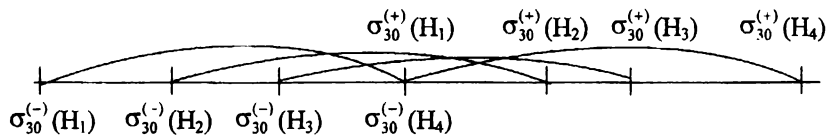
Рис. 4.10. К пересечению множеств  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$  :

*a* –  $\Phi_0 = \Phi_{21}$ ; *б* –  $\Phi_{21} < \Phi_0 < \Phi_{31}$ ; *в* –  $\Phi_0 = \Phi_{31}$

a



b



в

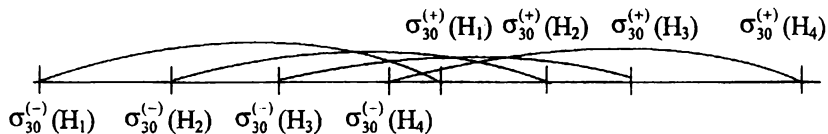


Рис. 4.11. К пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_1$ :  
 а -  $\Phi_{31} < \Phi_0 < \Phi_{41}$ ; б -  $\Phi_0 = \Phi_{41}$ ; в -  $\Phi_0 > \Phi_{41}$

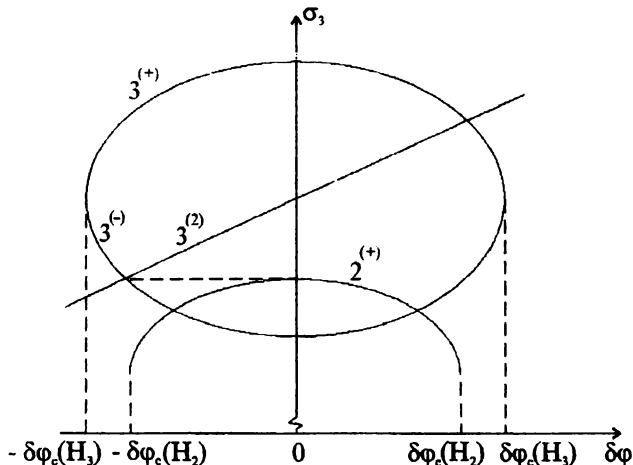


Рис. 4.12. Взаимное расположение кривых, отвечающее условиям (4.53):  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_3, \Phi_0, \delta\phi)$  – кривые  $3^{(\pm)}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\phi)$  – кривая  $3^{(2)}$ ;  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(H_2, \Phi_0, \delta\phi)$  – кривая  $2^{(+)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$ )

Тогда в интервале  $\Phi'_{32} < \Phi_0 < \Phi_{43}$  углов  $\Phi_0$  будем иметь

$$\Sigma_3(\Phi_0) \cap \Sigma_2(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi_2^{(-)}) < \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_2, \Phi_0) \} , \quad (4.54)$$

где  $\delta\varphi_2^{(-)} = \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0)$  – корень уравнения (4.53б), принадлежащий интервалу (4.53в); символ  $\cap$  используется для обозначения пересечения (общей части) множеств.

Уравнение (4.53а) и ограничения (4.53в), разрешенные относительно  $\text{tg } \delta\varphi$ , принимают вид

$$\text{tg } \delta\varphi = \frac{\sqrt{1 - \text{tg}^2(\alpha_2 + \Phi_0)} \text{tg}(\alpha_2 + \Phi_0) - (35/74)}{(49/74) - \text{tg}^2(\alpha_2 + \Phi_0)} , \quad (4.55)$$

$$-\sin \Phi_0 / \sqrt{\cos(\alpha_3 + \Phi_0) \cos(\alpha_3 - \Phi_0)} < \text{tg } \delta\varphi < 0 . \quad (4.56)$$

Уравнение (4.53б) можно также выразить через  $\text{tg } \delta\varphi$  :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 \Phi_0 - \cos(\alpha_3 + \Phi_0) \cos(\alpha_3 - \Phi_0)} \text{tg}^2 \delta\varphi = \\ & = (5/\sqrt{74}) \{ (1 + \text{tg}^2 \delta\varphi) \cos \Phi_0 - \\ & - (5/\sqrt{99}) [(99/25) + \text{tg}^2 \delta\varphi] \sin(\alpha_2 + \Phi_0) \} . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Подстановка (4.55) в (4.57) приводит к замкнутому уравнению относительно  $\Phi_0$ ; решение его даст  $\Phi_0 = \Phi'_{32} = 1,07325092^\circ$ .

В интервале

$$\Phi_{43} \leq \Phi_0 < \Phi_{42} \quad (4.58)$$

углов  $\Phi_0$  пересекаются (см. рис. 4.8) множества  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_3$ . Пересечение это определяется выражением

$$\Sigma_4(\Phi_0) \cap \Sigma_3(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_{30}^{(-)}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_3, \Phi_0) \} , \quad (4.59)$$

о чем свидетельствуют графики, представленные на рис. 4.13.

В интервале (4.58) углов  $\Phi_0$  имеет место и пересечение множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$ , определяемое (рис. 4.14) выражением (4.54).

В интервале  $\Phi_{42} \leq \Phi_0 < \Phi_{21}$  углов  $\Phi_0$  имеют место пересечение множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_2$  (см. рис. 4.9), определяемое (рис. 4.15) выражением

$$\Sigma_4(\Phi_0) \cap \Sigma_2(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_{30}^{(-)}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_2, \Phi_0) \} , \quad (4.60)$$

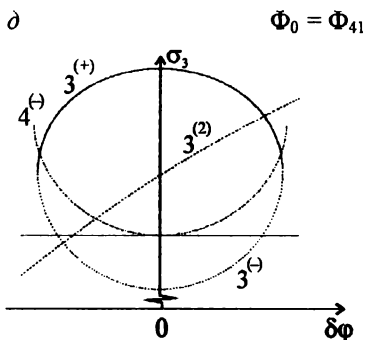
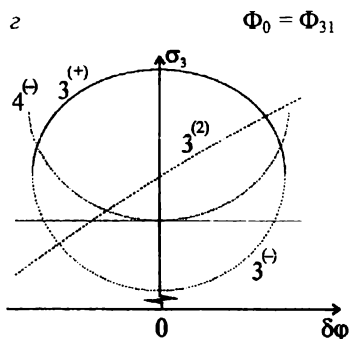
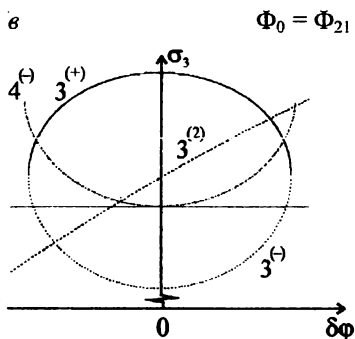
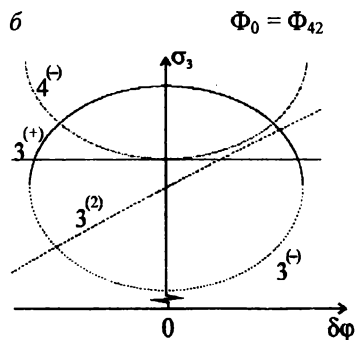
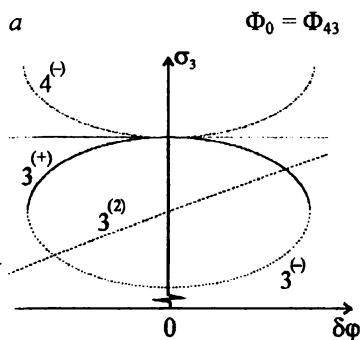


Рис. 4.13. Взаимное расположение кривых:

$\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $3^{(\pm)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi)$  – кривая  $3^{(2)}$ ;  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $4^{(-)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_3$ )



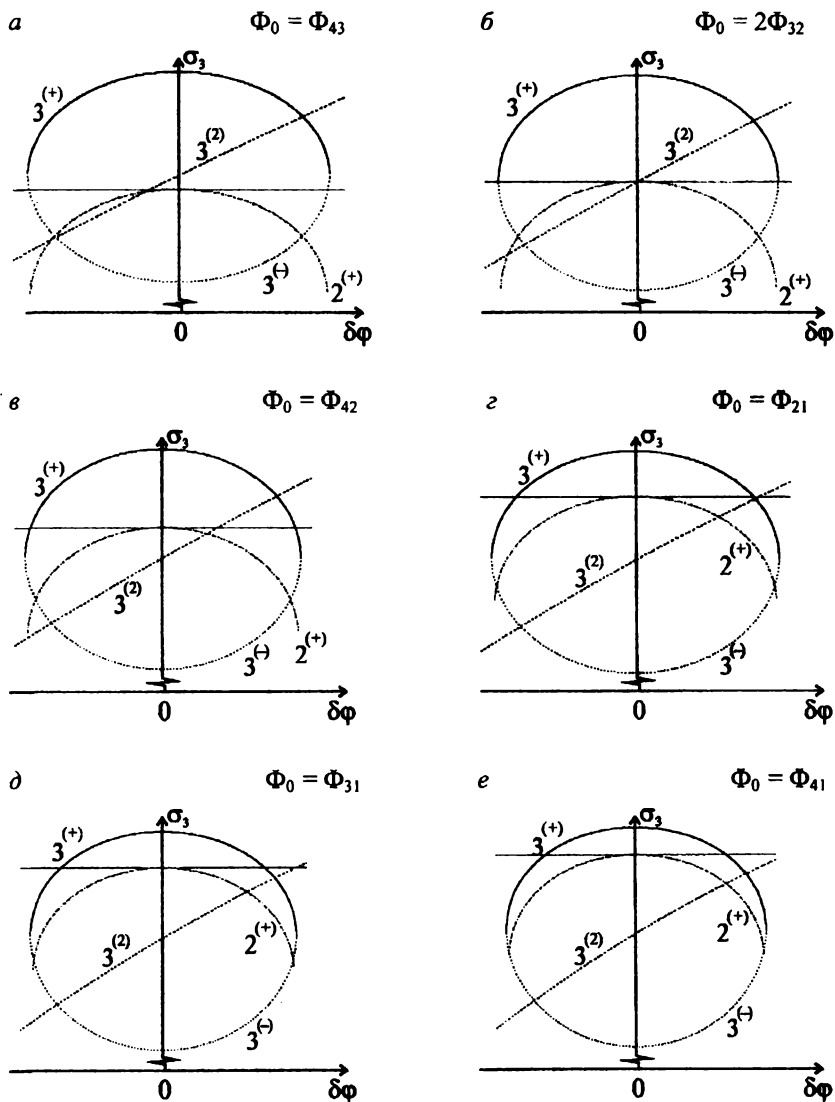


Рис. 4.14. Взаимное расположение кривых:  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $3^{(\pm)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi)$  – кривая  $3^{(2)}$ ;  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(H_2, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $2^{(+)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$ )

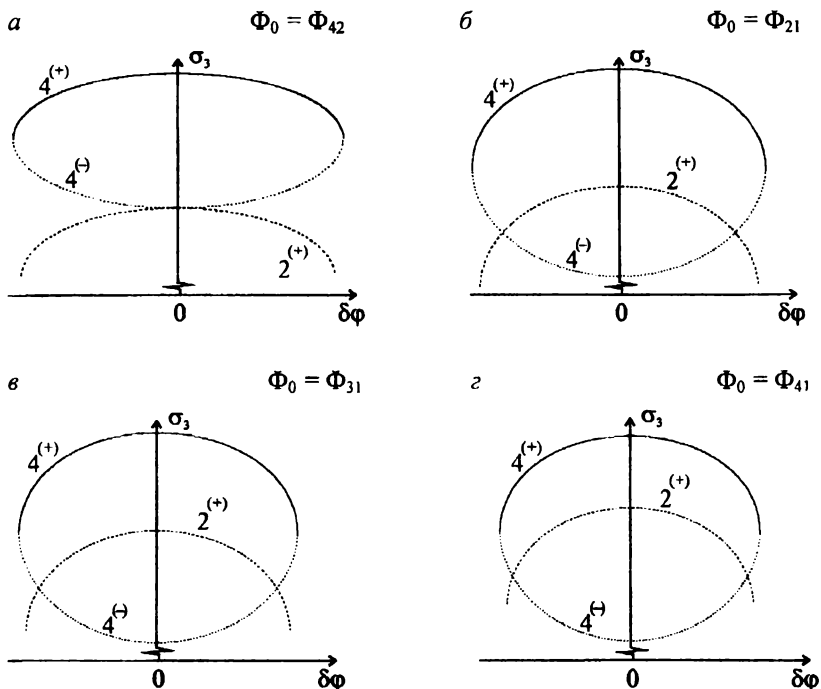


Рис. 4.15. Взаимное расположение кривых:  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $4^{(\pm)}$  и  $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(H_2, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $2^{(+)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_2$ )

а также пересечения множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$  (см. формулу (4.54)),  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_3$  (см. формулу (4.59)).

В интервале  $\Phi_{21} \leq \Phi_0 \leq \Phi_{31}$  углов  $\Phi_0$ , наряду с пересечениями  $\Sigma_3 \cap \Sigma_2$ ,  $\Sigma_4 \cap \Sigma_3$ ,  $\Sigma_4 \cap \Sigma_2$  дополнительно реализуется (см. рис. 4.10) пересечение множеств  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ .

Это пересечение определяется (рис. 4.16) выражением

$$\Sigma_2(\Phi_0) \cap \Sigma_1(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_{30}^{(-)}(H_2, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_1, \Phi_0) \}. \quad (4.61)$$

Что же касается множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_1$ , то они не пересекаются (напомним, что нижняя граница множества  $\Sigma_3(\Phi_0)$  превосходит  $\sigma_{30}^{(-)}(H_3, \Phi_0)$ ).

Пересечения множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_1$  можно ожидать (см. рис. 4.11) при  $\Phi_0$  из интервала

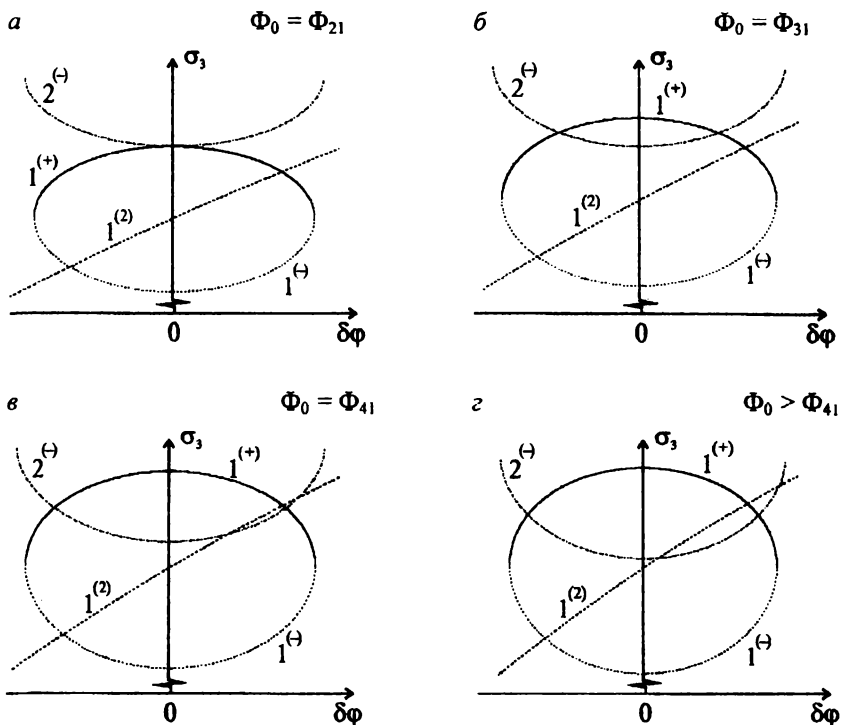


Рис. 4.16. Взаимное расположение кривых:

$\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_1, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $1^{(\pm)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_1, \delta\varphi)$  – кривая  $1^{(2)}$ ;  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(H_2, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $2^{(-)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ )

$$\Phi_{31} < \Phi_0 < \Phi_{41}, \quad (4.62)$$

если в этом интервале найдется значение (обозначим его  $\Phi'_{31}$ ) угла  $\Phi_0$ , удовлетворяющее (см. рис. 4.17, б) системе уравнений

$$\sigma_{30}^{(+)}(H_1, \Phi_0) = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi), \quad (4.63a)$$

$$\sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) = \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \quad (4.63б)$$

и ограничению (4.53в).

Тогда в интервале  $\Phi'_{31} < \Phi_0 < \Phi_{41}$  углов  $\Phi_0$  будем иметь

$$\Sigma_3(\Phi_0) \cap \Sigma_1(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi_2^{(-)}) < \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_1, \Phi_0) \}, \quad (4.64)$$

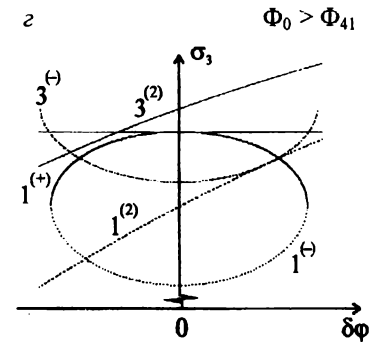
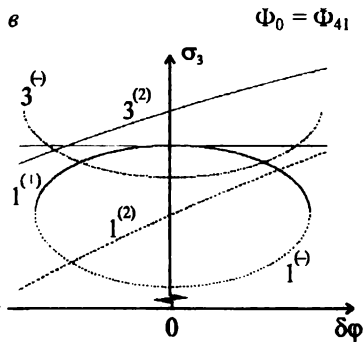
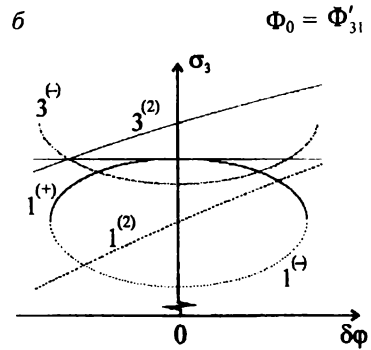
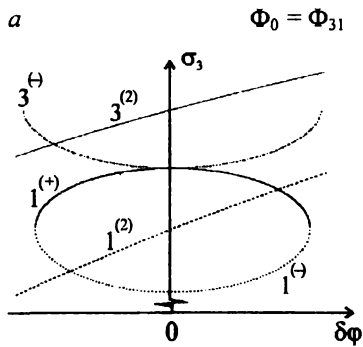


Рис. 4.17. Взаимное расположение кривых:  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_1, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $1^{(\pm)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_1, \delta\varphi)$  – кривая  $1^{(2)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $3^{(-)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi)$  – кривая  $3^{(2)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_1$ )

где  $\delta\varphi_2^{(-)} = \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0)$  – корень уравнения (4.63б), принадлежащий интервалу (4.53в).

Уравнение (4.63а) выражается через  $\operatorname{tg} \delta\varphi$  формулой

$$\operatorname{tg} \delta\varphi = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \Phi_0) \operatorname{tg}(\alpha_1 + \Phi_0) - (35/74)}}{(49/74) - \operatorname{tg}^2(\alpha_1 + \Phi_0)}, \quad (4.65)$$

ограничения (4.53в) – формулой (4.56), а уравнение (4.63б) – формулой

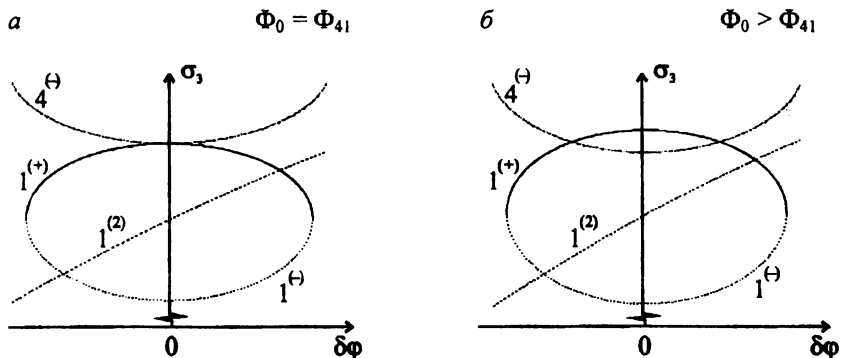


Рис. 4.18. Взаимное расположение кривых:

$\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_1, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $1^{(\pm)}$ ;  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_1, \delta\varphi)$  – кривая  $1^{(2)}$ ;  
 $\sigma_3 = \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривая  $4^{(-)}$  (к пересечению множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_1$ )

$$\sqrt{\sin^2 \Phi_0 - \cos(\alpha_3 + \Phi_0) \cos(\alpha_3 - \Phi_0) \operatorname{tg}^2 \delta\varphi} = (5/\sqrt{74}) \{ (1 + \operatorname{tg}^2 \delta\varphi) \cos \Phi_0 - (5/\sqrt{99}) [(99/25) + \operatorname{tg}^2 \delta\varphi] \sin(\alpha_1 + \Phi_0) \}. \quad (4.66)$$

Подстановка (4.65) в (4.66) приводит к замкнутому уравнению относительно  $\Phi_0$ , а его решение дает  $\Phi_0 = \Phi'_{31} = 6,1401262^\circ$ .

В интервале (4.62) углов  $\Phi_0$  пересекаются также множества  $\Sigma_3$  и  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_3$ ,  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_1$ .

Наконец, при  $\Phi_0 \geq \Phi_{41}$  реализуется дополнительно (см. рис. 4.18) пересечение множеств  $\Sigma_4$  и  $\Sigma_1$ . Определяется оно выражением

$$\Sigma_4(\Phi_0) \cap \Sigma_1(\Phi_0) = \{ \sigma_3 : \sigma_{30}^{(-)}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_{30}^{(+)}(H_1, \Phi_0) \}, \quad (4.67)$$

Для удобства результаты анализа возможных пересечений множеств (4.47) сведены в табл. 4.4.

Таблица 4. 4

К пересечению множеств (4.47)

Пересечение	Интервал углов $\Phi_0$						
	$[0, \Phi'_{32}]$	$(\Phi'_{32}, \Phi_{42})$	$[\Phi_{43}, \Phi_{42})$	$[\Phi_{42}, \Phi_{21})$	$[\Phi_{21}, \Phi'_{31}]$	$(\Phi'_{31}, \Phi_{41})$	$\Phi_0 \geq \Phi_{41}$
$\Sigma_3 \cap \Sigma_2$	—	(4.54)	(4.54)	(4.54)	(4.54)	(4.54)	(4.54)
$\Sigma_4 \cap \Sigma_3$	—	—	(4.59)	(4.59)	(4.59)	(4.59)	(4.59)
$\Sigma_4 \cap \Sigma_2$	—	—	—	(4.60)	(4.60)	(4.60)	(4.60)
$\Sigma_2 \cap \Sigma_1$	—	—	—	—	(4.61)	(4.61)	(4.61)
$\Sigma_3 \cap \Sigma_1$	—	—	—	—	—	(4.64)	(4.64)
$\Sigma_4 \cap \Sigma_1$	—	—	—	—	—	—	(4.67)

## 5. Ориентационно эквивалентные плоскости $\Pi_3$ ( $H$ )

Существование значений  $\sigma_3$ , общих для множеств  $\Sigma_i$  (см. формулы (4.47)) при определенных  $\Phi_0$ , указывает на существование плоскостей  $\Pi_3$  ( $H_i$ ), эквивалентных с точки зрения их ориентационной близости, задаваемой углом  $\Phi_0$ , к плоскости  $H_i$ . Наглядное представление об изменениях в ориентации плоскостей  $\Pi_3$  в зависимости от  $\sigma_3$ ,  $\delta\varphi$  и  $\Phi_0$  можно получить, обратившись к рис. 4.19 – 4.21. На этих рисунках изображены границы областей  $D_i = D(H_i, \Phi_0)$ , образуемых поллюсами<sup>1</sup> плоскостей  $\Pi_3$  ( $H_i$ ), каждая из которых задается вектором нормали

$$N_3(H_i) = \sqrt{1 - \sigma_3^2} [\cos(\beta_i + \delta\varphi) e_1^y + \sin(\beta_i + \delta\varphi) e_2^y] + \sigma_3 e_3^y, \quad (4.68)$$

и отклоняется от плоскости  $H_i$  (см. формулы (4.43)) на угол, не превышающий  $\Phi_0$ .

Переменные  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  в (4.68) при фиксированных  $H_i$  и  $\Phi_0$  принимают значения из области (обозначим ее  $\tilde{D}(H_i, \Phi_0)$ ), которая определяется:

• если  $i = 1, 3$ , неравенствами:

$$-\delta\varphi_c(H_i, \Phi_0) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)}(H_i, \Phi_0), \quad (4.69a)$$

$$\sigma_3^{(-)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi) \quad (4.69б)$$

и

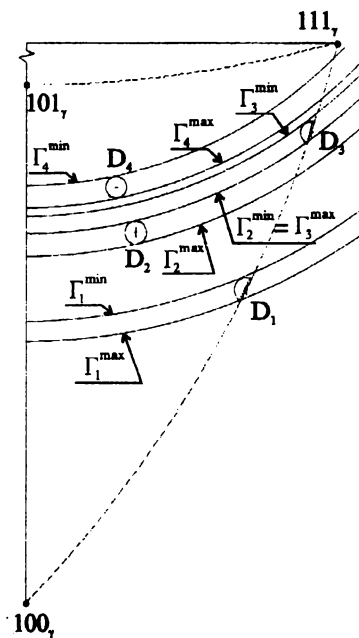
$$\delta\varphi_2^{(-)}(H_i, \Phi_0) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(+)}(H_i, \Phi_0), \quad (4.69в)$$

$$\sigma_3^{(2)}(H_i, \delta\varphi) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi); \quad (4.69г)$$

---

<sup>1</sup> Под поллюсом плоскости  $\Pi$  здесь подразумевается стереографическая проекция  $S$  на плоскость  $(001)_\gamma$  точки верхней (если смотреть в направлении  $[00\bar{1}]_\gamma$ ) полусферы единичного радиуса, положение которой на полусфере задается вектором нормали  $N$  к плоскости  $\Pi$ . Координаты  $s_1, s_2$  поллюса  $S$  в системе координат  $Os_1s_2$  с осями  $Os_1$  и  $Os_2$ , направленными вдоль  $e_1^y$  и  $e_2^y$  соответственно, выражаются через компоненты вектора нормали  $N$  формулами  $s_1 = N_1/(1 + N_3)$ ,  $s_2 = N_2/(1 + N_3)$ , где  $N_3 = \sqrt{1 - N_1^2 - N_2^2}$ . На рисунках изображается только один стереографический треугольник, ограниченный стереографическими проекциями линий пересечения плоскостей  $(010)_\gamma$ ,  $(0\bar{1}1)_\gamma$ ,  $(\bar{1}01)_\gamma$  с полусферой.

*a*



*б*

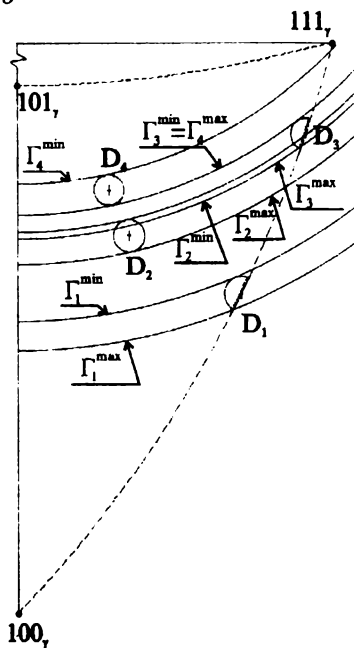


Рис. 4.19. Границы областей  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

*a* –  $\Phi_0 = \Phi_{32}^i$ ; *б* –  $\Phi_0 = \Phi_{43}$

• если  $i = 2, 4$ , неравенствами:

$$-\delta\varphi_c(H_i, \Phi_0) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_c(H_i, \Phi_0), \quad (4.70a)$$

$$\sigma_3^{(-)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi), \quad (4.70б)$$

где

$$\delta\varphi_c(H_i, \Phi_0) = \arcsin(\sin \Phi_0 / \cos \alpha_i), \quad (4.71)$$

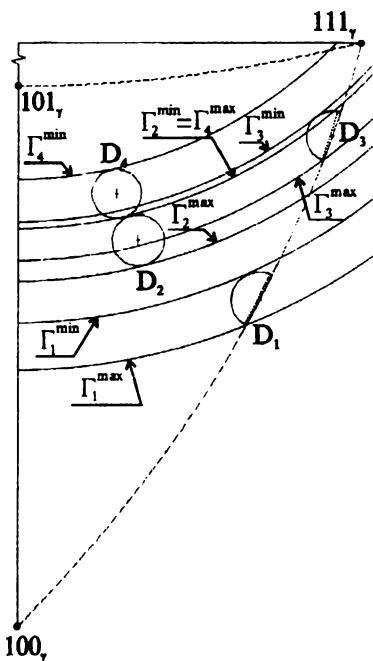
$\delta\varphi_2^{(\pm)}$  – корни уравнений

$$\sigma_3^{(2)}(H_i, \delta\varphi) = \sigma_3^{(\pm)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi). \quad (4.72)$$

Углы  $\beta_i$  и  $\alpha_i$  определяются соответственно формулами (4.51в) и (4.45). Значения корней  $\delta\varphi_2^{(\pm)}$  для характерных  $\Phi_0$  даны в табл. 4.5.



*a*



*б*

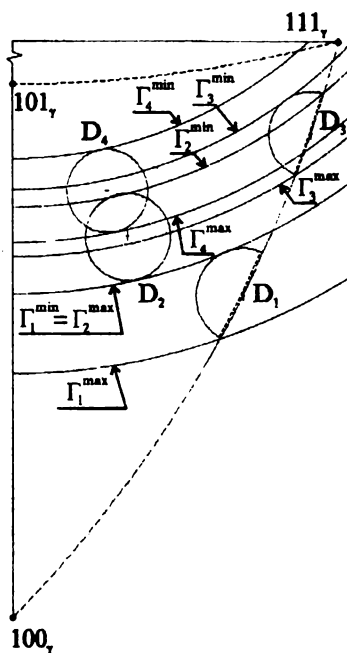


Рис. 4 20. Границы областей  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

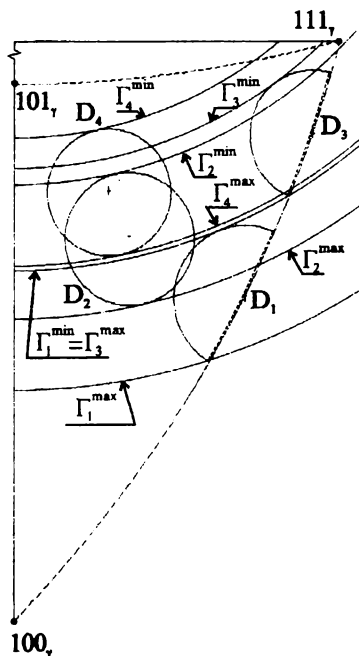
*a* –  $\Phi_0 = \Phi_{42}$ ; *б* –  $\Phi_0 = \Phi_{21}$

Таблица 4.5

Значения корней  $\delta\varphi_2^{(\pm)}$  для характерных  $\Phi_0$

$\Phi_0$	$\delta\varphi_2^{(-)}(H_1, \Phi_0), ^\circ$	$\delta\varphi_2^{(+)}(H_1, \Phi_0), ^\circ$	$\delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0), ^\circ$	$\delta\varphi_2^{(+)}(H_3, \Phi_0), ^\circ$
$\Phi_{32}$	-0,67936062	0,68427769	-0,79762850	0,80555733
$\Phi'_{32}$	-0,85968849	0,86757727	-1,00898122	1,02170166
$\Phi_{43}$	-1,20205210	1,21753071	-1,40981423	1,43477142
$\Phi_{42}$	-1,87307652	1,91092379	-2,19375963	2,25477140
$\Phi_{21}$	-3,20454728	3,316857200	-3,74248020	3,92341249
$\Phi_{31}$	-3,86257244	4,026838670	-4,50440260	4,76891724
$\Phi'_{31}$	-4,82140361	5,079829321	-5,61036221	6,02615812
$\Phi_{41}$	-5,02024981	5,300988141	-5,83907389	6,29068175

*a*



*б*

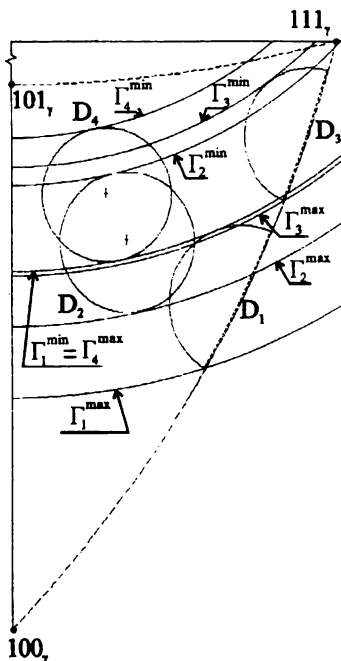


Рис. 4.21. Границы областей  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ :

$$a - \Phi_0 = \Phi'_{31}; \quad б - \Phi_0 = \Phi_{41}$$

Нормали (4.68) образуют наименьший и наибольший углы с вектором  $e_3^{\gamma}$  при максимальном –  $\sigma_{30}^{(+)}(H_i, \Phi_0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и минимальном –  $\sigma_{30}^{(-)}(H_i, \Phi_0, \delta\phi_2^{(-)})$ , если  $i = 1, 3$ , или  $\sigma_{30}^{(-)}(H_i, \Phi_0)$ , если  $i = 2, 4$ , значениях  $\sigma_3$  соответственно. Поэтому на рис. 4.19 – 4.21 каждая из областей  $D_i$  располагается между окружностями  $\Gamma_i^{\max}$  и  $\Gamma_i^{\min}$  – полосами плоскостей (4.68), соответствующих фиксированным значениям  $\sigma_3$  (максимальному и минимальному) и переменному  $\delta\phi$  из интервала  $[0, 2\pi)$ .

Наложение таких кольцевых зон, соответствующих различным  $i = i_1, i_2, \dots, i_k, \dots$  при заданном  $\Phi_0$ , выделяет кольцо, содержащее полюсы плоскостей  $\{P_3(H_{i_1})\}, \{P_3(H_{i_2})\}, \dots, \{P_3(H_{i_k})\}, \dots$ , равноправных в том смысле,

что каждая плоскость  $P_3(H_i)$  семейства  $\{P_3(H_i)\}$  отклоняется от плоскости  $H_i$  на угол, не превышающий  $\Phi_0$ .

### *Заключение к главе*

Итак, предположение, связывающее габитусную плоскость мартенситного кристалла с ориентационно неизменной плоскостью семейства  $\{P_3(H)\}$ , не лишено оснований, если судить по полюсным фигурам (см. рис. 4.19 – рис. 4.21). С другой стороны, оно допускает и экспериментальную проверку в отношении интервалов значений параметра  $\sigma_3$ , поскольку углы, образуемые наблюдаемой габитусной плоскостью с ближайшей к ней кристаллографической плоскостью – величины легко вычисляемые на основе результатов измерений.

Вместе с тем к измеряемым величинам относятся и геометрические характеристики преобразования решеток –  $\kappa$  и  $\tau$ , которые входят в выражения (4.8) для собственных значений тензора Бейна. Поэтому внимания заслуживают вопросы, связанные с областью изменения параметров  $\kappa$ ,  $\tau$  и описанием однородного деформационного преобразования  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку в переменных, определяющих ориентацию плоскостей  $P_3(H)$  относительно заданной плоскости  $H$ .

## Глава 5. ОПИСАНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО $\gamma \rightarrow \alpha$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РЕШЕТОК. ОРИЕНТАЦИОННОЕ СООТВЕТСТВИЕ РЕШЕТОК $\alpha$ И $\gamma$

Ориентация плоскостей  $\Pi_3(H)$ , принятая за базовый признак при сравнении результатов вычислений с результатами экспериментальных наблюдений, задается наиболее просто и геометрически наглядно в переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  и  $\Phi_0$ . Поэтому дальнейшая задача состоит в том, чтобы выразить все составляющие тензора  $L$ , преобразующего  $\gamma$ -решетку в  $\alpha$ -решетку, через переменные  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\Phi_0$ .

### 1. Область допустимых значений параметров деформации Бейна

Классификация плоскостей  $\Pi_3(\eta, \varphi)$  по признаку ориентационной близости к заданной плоскости  $H$ , характеризуемой количественно значением угла  $\Phi_0$ , приводит к определенным ограничениям на возможные значения  $\sigma_3$ , которые выражаются:

• если  $i = 1, 3$ , неравенством:

$$\sigma_3^{\min}(H_i, \Phi_0) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_i, \Phi_0), \quad (5.1a)$$

• если  $i = 2, 4$ , неравенством:

$$\sigma_3^{\min}(H_i, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_i, \Phi_0), \quad (5.1b)$$

где  $\sigma_3^{\max} = \sigma_{30}^{(+)}(H_i, \Phi_0) = \sin(\alpha_i + \Phi_0)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $\sigma_3^{\min} = \sigma_{30}^{(-)}(H_i, \Phi_0) = \sin(\alpha_i - \Phi_0)$  при  $i = 2, 4$ ,  $\sigma_3^{\min} = \sigma_3^{(-)}(H_i, \Phi_0, \delta\varphi_2^{(-)})$  при  $i = 1, 3$ ,  $\delta\varphi_2^{(-)} = \delta\varphi_2^{(-)}(H_i, \Phi_0)$  – корень уравнения (4.48). Значения всех этих величин для характерных  $\Phi_0$  приведены в табл. 5.1 и 4.5.

С другой стороны,  $\sigma_3$ , будучи функцией (см. формулу (3.69)) собственных значений (4.8) тензора Бейна, связана с параметрами  $\kappa$  и  $\tau$  – геометрическими характеристиками преобразования решетки  $\gamma$  в решетку  $\alpha$ . В явном виде эта связь выражается формулой

$$\sigma_3 = \frac{1}{\kappa^2} \sqrt{\frac{1 - 2\kappa^4\tau^2}{2(2 - \tau^2)}}. \quad (5.2)$$

Таблица 5.1

Значения нижней и верхней границ области изменения переменных  $\sigma_3$ 

$\Phi_0$	$H_1$		$H_2$		$H_3$		$H_4$	
	$\sigma_3^{\min}$	$\sigma_3^{\max}$	$\sigma_3^{\min}$	$\sigma_3^{\max}$	$\sigma_3^{\min}$	$\sigma_3^{\max}$	$\sigma_3^{\min}$	$\sigma_3^{\max}$
$\Phi_{32}$	0,33901578	0,36198017	0,46367968	0,48967865	0,49510734	0,51524927	0,53473790	0,55949374
$\Phi'_{32}$	0,33656631	0,36565305	0,46018248	0,49311283	0,49311284	0,51862465	0,53140176	0,56275756
$\Phi_{43}$	0,33188883	0,37262931	0,45350519	0,49962922	0,48929476	0,52502800	0,52502800	0,56894664
$\Phi_{42}$	0,32261914	0,38631165	0,44027563	0,51238464	0,48169221	0,53755653	0,51238464	0,58104579
$\Phi_{21}$	0,30383132	0,41347523	0,41347523	0,53760778	0,46614043	0,56230846	0,48671144	0,60490866
$\Phi_{31}$	0,29435584	0,42689482	0,39996520	0,55001826	0,45822650	0,57447567	0,47373987	0,61661822
$\Phi'_{31}$	0,28032846	0,44642668	0,37997297	0,56801987	0,44642668	0,59211046	0,45450889	0,63356443
$\Phi_{41}$	0,27738722	0,45047240	0,37578219	0,57173933	0,44394000	0,59575200	0,45047240	0,63705996

Отсюда находим

$$\kappa = 1 / q, \quad (5.3a)$$

где  $q$  – функция  $\tau$  и  $\sigma_3$ ,

$$q = \{2 [\tau^2 + (2 - \tau^2) \sigma_3^2]\}^{1/4}. \quad (5.3b)$$

Значения функции (5.3) должны удовлетворять неравенствам (4.12), т. е.

$$(2\tau)^{-1/3} < 1/q < (\tau\sqrt{2})^{-1/2} \quad (5.4)$$

при  $\tau$  из интервала

$$1 \leq \tau < \sqrt{2}. \quad (5.5)$$

Второе из неравенств (5.4) справедливо при любых  $\sigma_3 > 0$ , так что кривые, изображающие функцию (5.3a) в интервале (5.5), в том числе и кривая  $1/q|_{\sigma_3=\sigma_3^{\max}}$ , располагаются всегда ниже кривой  $\alpha'_1\alpha''$  (см. рис. 4.1).

Что же касается первого неравенства, то оно выполняется, если только

$$\sigma_3 < \sigma_m(\tau), \quad (5.6)$$

где

$$\sigma_m(\tau) = [1 + (2/\tau^2)^{1/3} + (2/\tau^2)^{2/3}]^{-1/2}. \quad (5.7)$$

Функция (5.7) монотонно возрастает в интервале (5.5):

$$\sigma_m(1) \leq \sigma_m < \sigma_m(\sqrt{2}), \text{ где } \sigma_m(1) \approx 0,50982453, \sigma_m(\sqrt{2}) \approx 0,57735027.$$

Используя данные табл. 5.1 и графики, представленные на рис. 5.1 – 5.3, легко видеть, что неравенство (5.6) вносит определенные коррективы в ограничения (5.1), а именно

- если  $0 \leq \Phi_0 \leq \Phi_{41}$  и  $1 \leq \tau < \sqrt{2}$ , то

$$\sigma_3^{\min}(H_1, \Phi_0) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_1, \Phi_0);$$

- если  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_2(\tau)$ ,  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_3(\tau) \leq \Phi_3(\sqrt{2})$ , то соответственно

$$\sigma_3^{\min}(H_2, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_2, \Phi_0),$$

$$\sigma_3^{\min}(H_3, \Phi_0) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_3, \Phi_0);$$

- если  $\Phi_0 \geq \Phi_2(\tau)$ ,  $\Phi_0 \geq \Phi_3(\tau)$ , то соответственно

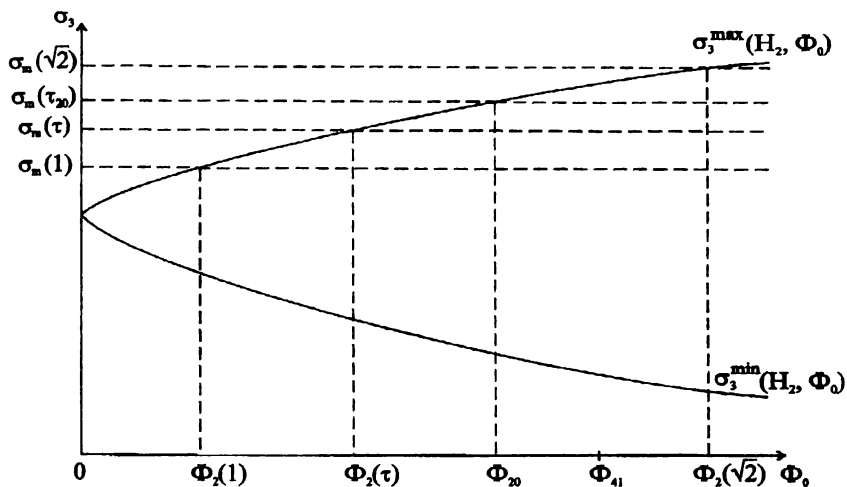


Рис. 5.1. Взаимное расположение кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{\min}(H_2, \Phi_0)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{\max}(H_2, \Phi_0)$  и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ ;  $\Phi_2(1) \approx 2,18^\circ$ ,  $\Phi_2(\sqrt{2}) \approx 6,79^\circ$

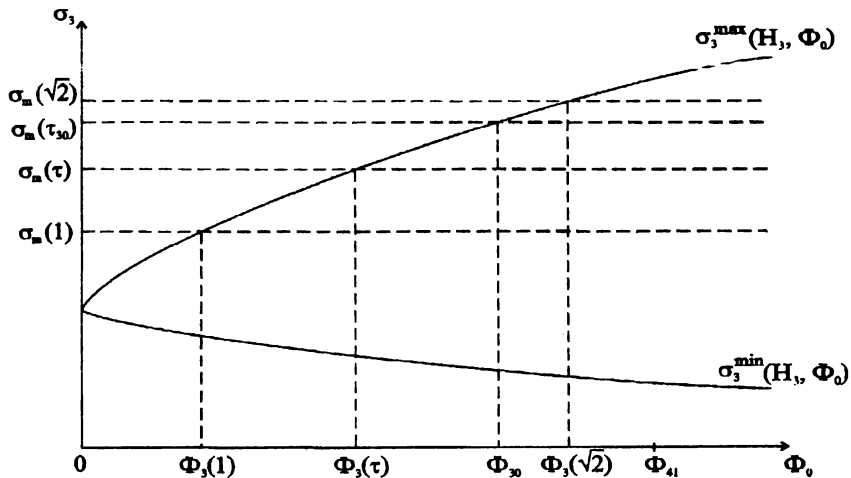


Рис. 5.2. Взаимное расположение кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{\min}(H_3, \Phi_0)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{\max}(H_3, \Phi_0)$  и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ ;  $\Phi_3(1) \approx 0,49^\circ$ ,  $\Phi_3(\sqrt{2}) \approx 5,10^\circ$

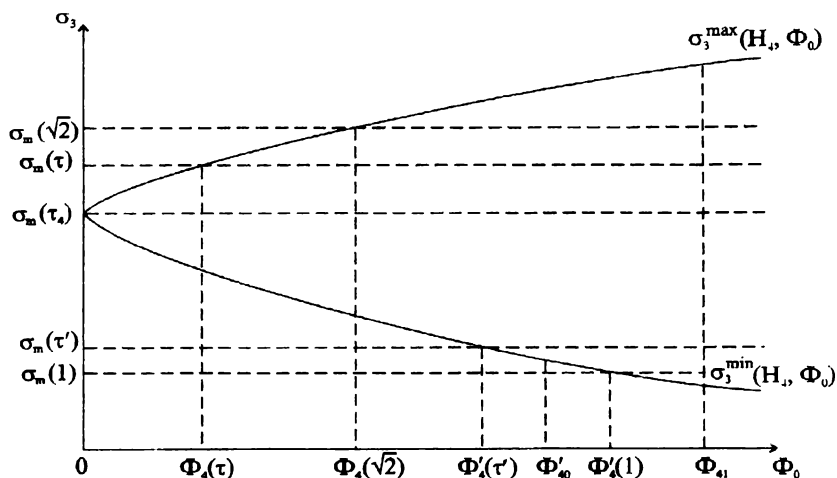


Рис. 5.3. Взаимное расположение кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{\min}(H_4, \Phi_0)$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{\max}(H_4, \Phi_0)$  и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ ;  $\Phi_4(\sqrt{2}) \approx 2,09^\circ$ ,  $\Phi_4'(1) \approx 2,52^\circ$

$$\sigma_3^{\min}(H_2, \Phi_0) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau),$$

$$\sigma_3^{\min}(H_3, \Phi_0) < \sigma_3 < \sigma_m(\tau),$$

где

$$\Phi_i(\tau) = \arcsin \sigma_m(\tau) - \alpha_i, \quad (5.8)$$

$\Phi_2(1) \approx 2,18^\circ$ ,  $\Phi_2(\sqrt{2}) \approx 6,79^\circ$ ,  $\Phi_3(1) \approx 0,49^\circ$ ,  $\Phi_3(\sqrt{2}) \approx 5,10^\circ$ , причем  $\Phi_i(\tau)$  не уступает заданному углу  $\Phi_{i0}$ , т. е.

$$\Phi_i(\tau) \geq \Phi_{i0}, \quad i = 2, 3,$$

где  $\Phi_{20} \geq \Phi_2(1)$ ,  $\Phi_3(1) \leq \Phi_{30} \leq \Phi_3(\sqrt{2})$ , если  $\tau_{i0}(\Phi_{i0}) \leq \tau < \sqrt{2}$ ,

$$\tau_{i0} = 4 \{ [1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\alpha_i + \Phi_{i0})]^{1/2} - 1 \}^{-3/2}.$$

Значения  $\tau_{20}$ ,  $\tau_{30}$  приводятся в табл. 5.2 и 5.3:

• если

$$1 \leq \tau \leq \tau_4 = 4 [(\sqrt{249}/5) - 1]^{-3/2} \approx 1,26358058 \quad (5.9)$$

и

$$\Phi_0 > \Phi_4'(\tau), \text{ то}$$



Таблица 5.2

Значения нижней границы  $\tau_{20}$  области изменения  $\tau$ 

$\Phi_{20}$	$\Phi_2(1)$	$\Phi_{42}$	$\Phi_{21}$	$\Phi_{31}$	$\Phi'_{31}$	$\Phi_{41}$	$\Phi_2(\sqrt{2})$
$\tau_{20}$	1	1,0132	1,1525	1,2281	1,3475	1,3736	1,4142

Таблица 5.3

Значения нижней границы  $\tau_{30}$  области изменения  $\tau$ 

$\Phi_{30}$	$\Phi_3(1)$	$\Phi_{32}$	$\Phi'_{32}$	$\Phi_{43}$	$\Phi_{42}$	$\Phi_{21}$	$\Phi_{31}$	$\Phi_3(\sqrt{2})$
$\tau_{30}$	1	1,0281	1,0459	1,0807	1,1522	1,3083	1,3933	1,4142

Таблица 5.4

Значения нижней границы  $\tau'_{40}$  области изменения  $\tau$ 

$\Phi'_{40}$	$\Phi_{32}$	$\Phi'_{32}$	$\Phi_{43}$	$\Phi_{42}$	$\Phi'_{4}(1)$
$\tau'_{40}$	1,1357	1,1165	1,0807	1,0132	1

$$\sigma_3^{\min}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau),$$

где

$$\Phi'_4(\tau) = \alpha_4 - \arcsin \sigma_m(\tau), \quad (5.10)$$

$$\Phi'_4(1) \approx 2,52^\circ;$$

• если  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_4(\tau)$ , то

$$\sigma_3^{\min}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{\max}(H_4, \Phi_0);$$

• если  $\Phi_0 \geq \Phi_4(\tau)$ , при  $\tau$  из интервала  $\tau_4 < \tau < \sqrt{2}$ , то

$$\sigma_3^{\min}(H_4, \Phi_0) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau),$$

где

$$\Phi_4(\tau) = \arcsin \sigma_m(\tau) - \alpha_4, \quad (5.11)$$

$$\Phi_4(\sqrt{2}) \approx 2,09^\circ.$$

Заметим, что угол  $\Phi'_4(\tau)$  не превышает заданного угла  $\Phi'_{40}$ :

$$\Phi'_4(\tau) \leq \Phi'_{40}, \text{ где } 0 \leq \Phi'_{40} \leq \Phi'_4(1).$$

Здесь  $\tau'_{40}(\Phi'_{40}) \leq \tau \leq \tau_4$ , где

$$\tau'_{40} = 4 \{ [1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\alpha_4 - \Phi'_{40})]^{1/2} - 1 \}^{-3/2}.$$

Некоторые из значений  $\tau'_{40}$  приведены в табл. 5.4.Судя по графикам (см. рис.5.3) и данным табл. 5.1, возможности ориентационного сближения плоскостей  $\Pi_3(H_4)$  с плоскостью  $H_4$  ограниче-

ны при заданном  $\tau$  из интервала (5.9) углом, зависящим от  $\tau$ . Например,  $\hat{N}_4 \Pi_3 (H_4) > 2,52^\circ$ , если  $\tau = 1$ . Несколько иначе обстоит дело с другими плоскостями. Так, неравенство (5.6) не накладывает дополнительных ограничений на ориентацию плоскостей  $\Pi_3$  вблизи плоскости  $H_1$ , а в случае плоскостей  $\Pi_3$ , соответственно близких к  $H_2$  и  $H_3$ , устанавливает запрет на углы отклонения их в направлении к оси  $e_3^Y$  (рис. 5.4), превышающие при заданном  $\tau$  углы  $\Phi_2(\tau)$  и  $\Phi_3(\tau)$ , поскольку угол между ортом  $e_3^Y$  и вектором нормали к  $\Pi_3$  растет с уменьшением  $\sigma_3$ .

Геометрическими характеристиками преобразования решетки  $\gamma$  в решетку  $\alpha$  служат параметры  $\kappa$  и  $\tau$ . Однако выбор их в качестве независимых переменных не очень удобен, если ориентацию плоскостей  $\Pi_3$  связывать с ориентацией заданной плоскости  $H$  с нормалью  $N$  (см. формулу (4.3)). Действительно, вектор нормали  $N_3$  к  $\Pi_3$  в этом случае выражается формулой

$$N_3|_{\varphi=\varphi_N(\tau)+\delta\varphi} = \sqrt{1-\sigma_3^2} [\cos(\beta+\delta\varphi)e_1^Y + \sin(\beta+\delta\varphi)e_2^Y] + \sigma_3 e_3^Y,$$

где  $\beta = \arcsin(N_2/\sqrt{N_1^2+N_2^2})$ .

Она определяет его в виде функции от  $\sigma_3$  и  $\delta\varphi$ , поэтому  $\sigma_3$  следует отнести к независимым переменным, а  $\kappa$  рассматривать как функцию  $\sigma_3$  и  $\tau$ , используя формулы (5.3).

Множество значений функции  $\kappa = \kappa(\sigma_3, \tau)$  ограничено снизу и сверху, причем границы его

$$\kappa_{\min} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2-\tau^2)(\sigma_3^{\max})^2]}, \quad \kappa_{\max} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2-\tau^2)(\sigma_3^{\min})^2]}$$

зависят от выбора задаваемой плоскости  $H$ . Рассмотрим их по отдельности для каждой из плоскостей набора (4.43).

Пусть  $H = H_1$ , тогда

$$\kappa_{\min}(H_1, \Phi_0, \tau) \leq \kappa < \kappa_{\max}(H_1, \Phi_0, \tau), \quad (5.12a)$$

где

$$\kappa_{\min} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2-\tau^2)\sin^2(\alpha_1 + \Phi_0)]}, \quad (5.12б)$$

$$\kappa_{\max} = 1/\sqrt[4]{2\{\tau^2 + (2-\tau^2)[\sigma_3^{(-)}(H_1, \Phi_0, \delta\varphi_2^{(-)}(H_1, \Phi_0))]^2\}} \quad (5.12в)$$

при любых  $\Phi_0$  из интервала  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_{41}$  и  $\tau$  из интервала (5.5).

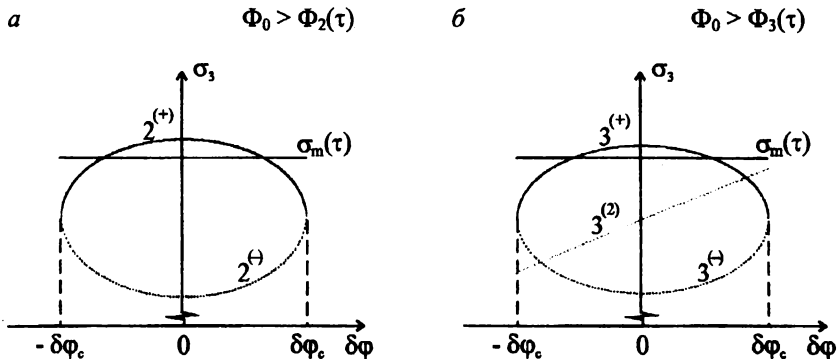


Рис.5.4. Взаимное расположение кривых:

а –  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_2, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $2^{(\pm)}$  и прямая  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ ;

б –  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $3^{(\pm)}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi)$  – кривая  $3^{(2)}$  и прямая  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$

При  $H = H_2$  имеем:

• если  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_2(\tau) = \arcsin \sigma_m(\tau) - \alpha_2$ , то

$$\kappa_{\min}(H_2, \Phi_0, \tau) \leq \kappa \leq \kappa_{\max}(H_2, \Phi_0, \tau), \quad (5.13a)$$

где

$$\kappa_{\min} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sin^2(\alpha_2 + \Phi_0)]}, \quad (5.13b)$$

$$\kappa_{\max} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sin^2(\alpha_2 - \Phi_0)]}; \quad (5.13b)$$

• если  $\Phi_0 \geq \Phi_2(\tau)$ , то

$$\kappa_{\min}(\tau) < \kappa \leq \kappa_{\max}(H_2, \Phi_0, \tau), \quad (5.14a)$$

где

$$\kappa_{\min} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sigma_m^2(\tau)]}, \quad (5.14b)$$

а  $\kappa_{\max}$  определяется формулой (5.13в).

Аналогичным образом обстоит дело при  $H = H_3$ , а именно

• если  $0 \leq \Phi_0 < \Phi_3(\tau) = \arcsin \sigma_m(\tau) - \alpha_3$ , то

$$\kappa_{\min}(H_3, \Phi_0, \tau) \leq \kappa < \kappa_{\max}(H_3, \Phi_0, \tau), \quad (5.15a)$$

где

$$\kappa_{\min} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sin^2(\alpha_3 + \Phi_0)]}, \quad (5.15b)$$

Таблица 5.5

Значения  $K_{\min}$ ,  $K_{\max}$  при  $\Phi_0 = \Phi'_{32}$  в случае епюскоостей  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ 

$\tau$	$H_1$		$H_2$		$H_3$	
	$K_{\min}$	$K_{\max}$	$K_{\min}$	$K_{\max}$	$K_{\min}$	$K_{\max}$
1,00445	0,81492522	0,81863763	0,79636235	0,80147068	0,79228153	0,79636235
1,00890	0,81354249	0,81719003	0,79528487	0,80031231	0,79126700	0,79528487
1,01335	0,81216535	0,81574879	0,79420989	0,79915718	0,79025447	0,79420989
1,01780	0,81079378	0,81431389	0,79313744	0,79800528	0,78924395	0,79313744
1,02225	0,80942775	0,81288528	0,79206752	0,79685662	0,78823545	0,79206752
1,02670	0,80806725	0,81146295	0,79100013	0,79571121	0,78722899	0,79100013
1,03115	0,80671223	0,81004684	0,78993529	0,79456903	0,78622457	0,78993529
1,03560	0,80536269	0,80863693	0,78887300	0,79343010	0,78522221	0,78887300
1,04005	0,80401860	0,80723319	0,78781327	0,79229441	0,78422191	0,78781327
1,04450	0,80267994	0,80583559	0,78675609	0,79116196	0,78322368	0,78675609
1,04895	0,80134668	0,80444408	0,78570149	0,79003276	0,78222753	0,78570149
1,05340	0,80001879	0,80305864	0,78464945	0,78890680	0,78123348	0,78464945
1,05785	0,79869626	0,80167923	0,78360000	0,78778408	0,78024152	0,78360000
1,06230	0,79737906	0,80030583	0,78255313	0,78666460	0,77925167	0,78255313
1,06675	0,79606716	0,79893839	0,78150884	0,78554837	0,77826393	0,78150884
1,07120	0,79476055	0,79757689	0,78046715	0,78443537	0,77727831	0,78046715
1,07565	0,79345919	0,79622130	0,77942805	0,78332561	0,77629482	0,77942805
1,08010	0,79216307	0,79487157	0,77839154	0,78221908	0,77531347	0,77839154
1,08455	0,79087215	0,79352768	0,77735764	0,78111578	0,77433425	0,77735764
1,08900	0,78958642	0,79218960	0,77632634	0,78001572	0,77335719	0,77632634
1,09345	0,78830586	0,79085729	0,77529765	0,77891889	0,77238228	0,77529765

Таблица 5.6

Значения  $\kappa_{\min}$ ,  $\kappa_{\max}$  при  $\Phi_0 = \Phi_{42}$  в случае плоскости  $H_4$

$\tau$	$\kappa_{\min}(\tau)$	$\kappa_{\max}(H_4, \Phi_{42}, \tau)$
1,01335	0,79019967	0,7902055
1,01780	0,78904636	0,7891819
1,02225	0,78789975	0,7881606
1,02670	0,78675978	0,78714133
1,03115	0,78562637	0,78612428
1,03560	0,78449947	0,78510941
1,04005	0,78337901	0,78409673
1,04450	0,78226492	0,78308625
1,04895	0,78115714	0,78207797
1,05340	0,78005561	0,78107190
1,05785	0,77896027	0,78006805
1,06230	0,77787105	0,77906643
1,06675	0,77678790	0,77806704
1,07120	0,77571076	0,77706990
1,07565	0,77463956	0,77607500
1,08010	0,77357426	0,77508234
1,08455	0,77251480	0,77409195
1,08900	0,77146112	0,77310382

Таблица 5.7

Значения  $\kappa_{\min}$ ,  $\kappa_{\max}$  при  $\Phi_0 = \Phi_{21}$  в случае плоскостей  $H_4$ 

$\tau$	$\kappa_{\min}(\tau)$	$\kappa_{\max}(H_4, \Phi_{21}, \tau)$
1	0,79370053	0,79737002
1,00445	0,79252668	0,79627677
1,00890	0,79135976	0,79518616
1,01335	0,79019967	0,79409820
1,01780	0,78904636	0,79301291
1,02225	0,78789975	0,79193029
1,02670	0,78675978	0,79085034
1,03115	0,78562637	0,78977308
1,03560	0,78449947	0,78869850
1,04005	0,78337901	0,78762661
1,04450	0,78226492	0,78655741
1,04895	0,78115714	0,78549092
1,05340	0,78005561	0,78442712
1,05785	0,77896027	0,78336604
1,06230	0,77787105	0,78230766
1,06675	0,77678790	0,78125200
1,07120	0,77571076	0,78019905
1,07565	0,77463956	0,77914882
1,08010	0,77357426	0,77810131
1,08455	0,77251480	0,77705652
1,08900	0,77146112	0,77601446

$$\kappa_{\max} = 1/\sqrt[4]{2\{\tau^2 + (2 - \tau^2)[\sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\Phi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0))]\}}; \quad (5.15в)$$

• если  $\Phi_0 \geq \Phi_3(\tau)$ , то

$$\kappa_{\min}(\tau) < \kappa < \kappa_{\max}(H_3, \Phi_0, \tau), \quad (5.16)$$

где  $\kappa_{\min}$  определяется формулой (5.14б), а  $\kappa_{\max}$  — формулой (5.15в).

Наконец, пусть  $H = H_4$ , тогда

$$\kappa_{\min}(\tau) < \kappa \leq \kappa_{\max}(H_4, \Phi_0, \tau) \quad (5.17а)$$

при  $\tau$  из интервала (5.9) и  $\Phi_0 > \Phi'_4(\tau) = \alpha_4 - \arcsin \sigma_m(\tau)$ , где  $\kappa_{\min}$  определяется формулой (5.14б), а

$$\kappa_{\max} = 1/\sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sin^2(\alpha_4 - \Phi_0)]}. \quad (5.17б)$$

Значения  $\kappa_{\min}$ ,  $\kappa_{\max}$ , вычисленные при  $\Phi_0 = \Phi'_{32}$  в случае плоскостей  $H_1, H_2, H_3$  и  $\Phi_0 = \Phi_{42}, \Phi_0 = \Phi_{21}$  в случае плоскости  $H_4$ , приводятся в табл. 5.5 – 5.7.

## 2. Составляющие однородного деформационного преобразования решетки $\gamma$ в решетку $\alpha$

Выразим составляющие тензора  $L$ , описывающего однородное деформационное преобразование  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку, через переменные  $\sigma_3, \tau$ , связывая способ задания его с углами  $\Phi_0$  и  $\delta\Phi$ , определяющими ориентацию плоскости  $\Pi_3(\eta, \Phi)$  относительно фиксированной плоскости  $H$  с нормалью (4.3).

Если исходить из разложения (1.9) тензора  $L$ , то при собственно деформации  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку по Бейну с осью сжатия  $e_3'$  для симметричной и ортогональной составляющих тензора  $L$  будем иметь

$$E = \sqrt[4]{2/[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sigma_3^2]} \{I + [(\tau/\sqrt{2}) - 1]e_3' \cdot e_3'\}, \quad (5.18)$$

$$\Omega = I \cos \Psi + (1 - \cos \Psi)\lambda \cdot \lambda + \sin \Psi U_\lambda, \quad (5.19)$$

где

$$\Psi = \arccos C_0, \quad (5.20а)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}(\tau + \sqrt{2})q^2} [q^4 + 2\sqrt{2}q^3 - (2 + \tau\sqrt{2})q^2 + 4\tau q + 2\sqrt{2}\tau], \quad (5.20б)$$

$$\lambda = \eta \left\{ \sqrt{1 - \Lambda} \left[ \cos(\beta + \delta\varphi + \eta \tilde{\beta}) \mathbf{e}_1' + \sin(\beta + \delta\varphi + \eta \tilde{\beta}) \mathbf{e}_2' \right] + \sqrt{\Lambda} \mathbf{e}_3' \right\}, \quad (5.20\text{в})$$

$$\Lambda = \frac{(q^2 - \tau\sqrt{2})(q - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}(\sqrt{2} - \tau)(1 - C_0)q^2}, \quad (5.20\text{г})$$

$\beta$  – полярный угол нормали  $\mathbf{N}$  к  $H$ , определяемый уравнениями:

$$\cos\beta = N_1 / \sqrt{N_1^2 + N_2^2}, \quad \sin\beta = N_2 / \sqrt{N_1^2 + N_2^2},$$

$$\tilde{\beta} = \arcsin \left[ \frac{q + \sqrt{2}}{2(q - \tau)} \sqrt{\frac{(2 - q^2)(q^2 - \tau\sqrt{2})}{(2 + \tau\sqrt{2})(1 - \sigma_3^2)}} \right], \quad (5.20\text{д})$$

$$q = \sqrt[4]{2[\tau^2 + (2 - \tau)\sigma_3^2]}, \quad \eta = \pm 1. \quad (5.20\text{е})$$

В представлении ориентационно неизменных плоскостей тензор  $\mathbf{L}$  выражается формулой

$$\mathbf{L} = \mathbf{v}^1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}^2 \cdot \mathbf{E}^2 \mathbf{v}_2 + |\mathbf{E}| \mathbf{v}^3 \cdot \mathbf{v}_3, \quad (5.21)$$

где

$$\mathbf{v}^1 = -|\mathbf{v}^1| \left[ \sin\chi_1 (\cos\psi_1 \mathbf{e}_1' + \sin\psi_1 \mathbf{e}_2') - \cos\chi_1 \mathbf{e}_3' \right], \quad (5.22\text{а})$$

$$\mathbf{v}^2 = -\eta \left\{ \sin\chi_2 (\cos\psi_2 \mathbf{e}_1' + \sin\psi_2 \mathbf{e}_2') + \cos\chi_2 \mathbf{e}_3' \right\}, \quad (5.22\text{б})$$

$$\mathbf{v}^3 = |\mathbf{v}^3| \left[ \sin\chi_3 (\cos\psi_3 \mathbf{e}_1' + \sin\psi_3 \mathbf{e}_2') - \cos\chi_3 \mathbf{e}_3' \right], \quad (5.22\text{в})$$

$$|\mathbf{v}^1| = |\mathbf{v}^3| = q\sqrt{2}(q - \tau)/(2\tau - q^3),$$

$$\chi_1 = \arccos \left[ q\sqrt{(1 - \sigma_3^2)/(2 + q^2)} \right], \quad (5.23\text{а})$$

$$\psi_1 = \beta + \delta\varphi + \eta \arcsin \sqrt{2/(2 + \sigma_3^2 q^2)}, \quad (5.23\text{б})$$

$$\chi_2 = \arccos \sqrt{(2 - q^2)/(2 - \tau^2)}, \quad (5.23\text{в})$$

$$\psi_2 = \beta + \delta\varphi + \eta \tilde{\beta} + \eta \arcsin \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - \tau)(q^2 + \tau\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(q^2 - \tau^2)}}, \quad (5.23\text{г})$$

$$\chi_3 = \arccos(\sigma_3 \sqrt{2}/q), \quad (5.23\text{д})$$



$$\psi_3 = \beta + \delta\varphi + \eta \arcsin \left[ \frac{\sigma_3 \sqrt{2} (\sqrt{2} - \tau^2)}{(q - \tau) \sqrt{(2 + q^2)(q^2 + \tau^2)}} \right], \quad (5.23e)$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{N}_1 = \sin \theta_1 (\cos \varphi_1 \mathbf{e}_1' + \sin \varphi_1 \mathbf{e}_2') + \cos \theta_1 \mathbf{e}_3', \quad (5.24a)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^2 \quad (5.24b)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{N}_3 = \sin \theta_3 [\cos(\beta + \delta\varphi) \mathbf{e}_1' + \sin(\beta + \delta\varphi) \mathbf{e}_2'] + \cos \theta_3 \mathbf{e}_3', \quad (5.24b)$$

$$\theta_1 = \arccos \left( \frac{\tau}{q} \sqrt{\frac{2 - q^2}{2 - \tau^2}} \right), \quad (5.25a)$$

$$\varphi_1 = \beta + \delta\varphi + \eta \tilde{\beta} - \eta \arcsin \sqrt{\frac{(\sqrt{2} - \tau)(q^2 + \tau\sqrt{2})}{2\sqrt{2}(q^2 - \tau^2)}}, \quad (5.25b)$$

$$\theta_3 = \arccos \sigma_3. \quad (5.25b)$$

Формулы (5.18) – (5.20), (5.21) – (5.25) определяют тензор  $\mathbf{L}$  в виде функции независимых переменных  $\eta$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau$ , удобном для анализа деформационной перестройки  $\gamma$ -решетки в  $\alpha$ -решетку с использованием данных относительно ориентировок  $\alpha$ -мартенсита, наблюдаемых в эксперименте.

### 3. Область изменения переменных $\delta\varphi$ , $\sigma_3$ , $\tau$

Составляющие тензора  $\mathbf{L}$  при заданной плоскости  $\mathbf{H}$  являются функциями независимых переменных  $\eta$  и  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau$ . Область изменения последних подчиняется определенным ограничениям, зависящим от выбора плоскости  $\mathbf{H}$  и угла  $\Phi_0$ , посредством которого устанавливается максимальный из углов, образуемых плоскостью  $\Pi_3$  с плоскостью  $\mathbf{H}$ . Укажем эти области для каждой из плоскостей (4.43) по отдельности, полагая, что значения угла  $\Phi_0$  отвечают требованиям (4.26), (4.37), и допуская, что  $\tau$  принимает значения из интервала (5.5).

Пусть  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ , тогда областью изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  будет область  $\tilde{D}(\mathbf{H}_1, \Phi_0)$ , определяемая неравенствами (4.69) при  $i = 1$ , а областью изменения  $\tau$  – интервал (5.5).

Пусть  $H = H_2$ , тогда областью изменения переменных  $\tau, \delta\phi, \sigma_3$  соответственно будут интервал (5.5) и область  $\tilde{D}(H_2, \Phi_0)$ , определяемая неравенствами (4.70) при  $i = 2$ , если

$$0 \leq \Phi_0 < \Phi_2(1) = \Phi_2(\tau)|_{\tau=1},$$

где  $\Phi_2(\tau)$  определяется формулой (5.8) при  $i = 2$ .

Если же  $\Phi_0 \geq \Phi_2(1)$ , то область  $\tilde{D}(H_2, \Phi_0)$  будет областью изменения переменных  $\delta\phi, \sigma_3$  только тогда, когда

$$\tau_{20} < \tau < \sqrt{2},$$

$$\text{где } \tau_{20} = 4 \left\{ [1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\alpha_2 + \Phi_0)]^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2}.$$

Что же касается значений  $\tau$  из интервала  $1 \leq \tau \leq \tau_{20}$ , то в этом случае область изменения переменных  $\delta\phi, \sigma_3$  определяется (см. рис. 5.4, а и неравенство (5.6)) двумя системами неравенств:

$$\begin{cases} -\delta\phi_c(H_2, \Phi_0) \leq \delta\phi < -\delta\phi_m^{(+)}(H_2, \Phi_0, \tau), \\ \delta\phi_m^{(+)}(H_2, \Phi_0, \tau) < \delta\phi \leq \delta\phi_c(H_2, \Phi_0), \\ \sigma_3^{(-)}(H_2, \Phi_0, \delta\phi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_2, \Phi_0, \delta\phi); \\ \\ \begin{cases} -\delta\phi_m^{(+)}(H_2, \Phi_0, \tau) \leq \delta\phi \leq \delta\phi_m^{(+)}(H_2, \Phi_0, \tau), \\ \sigma_3^{(-)}(H_2, \Phi_0, \delta\phi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau); \end{cases} \end{cases}$$

где  $\sigma_3^{(\pm)}$  и  $\delta\phi_c$  определяются соответственно формулами (4.51а) и (4.71) при  $i = 2$ , а  $\sigma_m$  — формулой (5.7);  $\delta\phi_m^{(+)}$  — положительный корень уравнения

$$\sigma_3^{(+)}(H_2, \Phi_0, \delta\phi) = \sigma_m(\tau).$$

Пусть  $H = H_3$ , тогда область  $\tilde{D}(H_3, \Phi_0)$ , определяемая неравенствами (4.69) при  $i = 3$ , будет областью изменения переменных  $\delta\phi, \sigma_3$  в следующих случаях:

1) при  $\tau$  из интервала (5.5) и  $\Phi_0$  из интервала

$$0 \leq \Phi_0 < \Phi_3(1) = \Phi_3(\tau)|_{\tau=1},$$

где  $\Phi_3(\tau)$  определяется формулой (5.8) при  $i = 3$ ;

2) при  $\tau$  из интервала  $\tau_{30} < \tau < \sqrt{2}$  и  $\Phi_0 \geq \Phi_3(1)$ , где

$$\tau_{30} = 4 \left\{ [1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\alpha_3 + \Phi_0)]^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2}.$$

Несколько сложнее обстоит дело, если  $\Phi_0 \geq \Phi_3(1)$ , а  $\tau$  принимает значения из интервала  $1 \leq \tau \leq \tau_{30}$ .

Последний в этом случае удобнее разбить на три части:

$$1 \leq \tau \leq \tau_{32} , \quad (5.26a)$$

$$\tau_{32} < \tau \leq \tau_{32}^{(-)} , \quad (5.26б)$$

$$\tau_{32}^{(-)} < \tau \leq \tau_{30} . \quad (5.26в)$$

Значению  $\tau = \tau_{32}$  на рис. 5.5 соответствует прямая  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau_{32})$ , проходящая через точку пересечения кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi)$  и  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi)$ , поэтому

$$\tau_{32} = 4 \left\{ \left[ 5 + 4 \operatorname{ctg}^2(\beta_3 + \delta\varphi) \right]^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2} \Big|_{\delta\varphi = \delta\varphi_2^{(+)}(H_3, \Phi_0)} ,$$

где  $\delta\varphi_2^{(+)}$  – корень уравнения

$$\sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) = \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi);$$

$\sigma_3^{(+)}$ ,  $\sigma_3^{(2)}$  определяются формулами (4.51a), (4.51б) при  $i = 3$ . Если  $\tau$  изменяется в пределах интервала (5.26a), то область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  определяется (см. рис. 5.5, а и неравенство (5.6)) тремя системами неравенств:

$$\begin{cases} -\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi < -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_m^{(2)}(H_3, \tau) , \\ \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) < \sigma_3 < \sigma_m(\tau) ; \end{cases}$$

где

$\delta\varphi_m^{(+)}$  – положительный корень уравнения

$$\sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) = \sigma_m(\tau);$$

$\delta\varphi_2^{(-)}$  – корень уравнения (4.48) при  $i = 3$ ;

$\delta\varphi_m^{(2)}$  – корень уравнения

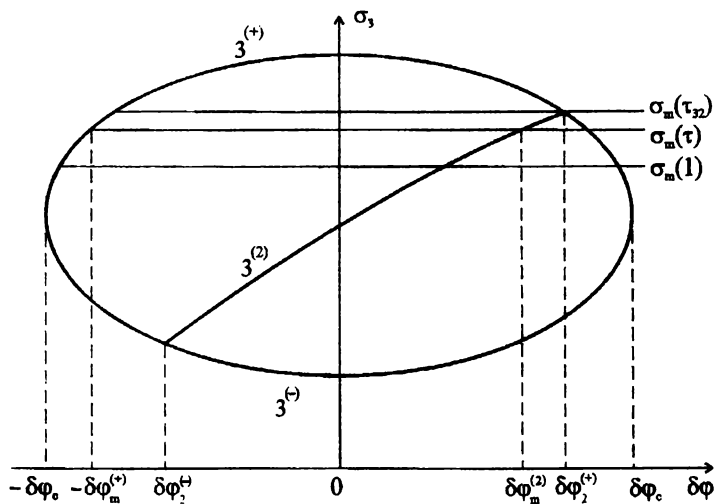
$$\sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) = \sigma_m(\tau).$$

$$\delta\varphi_m^{(2)} = \arcsin \left( \frac{(\tau^2/2)^{1/3}}{\sqrt{1 + (\tau^2/2)^{1/3}}} \right) - \beta_3 .$$

$\delta\varphi_c$ ,  $\sigma_3^{(-)}$  определяются формулами (4.71), (4.51a) при  $i = 3$ .

a

$$1 \leq \tau \leq \tau_{32}$$



б

$$\tau_{32} < \tau \leq \tau_{32}^{(-)}$$

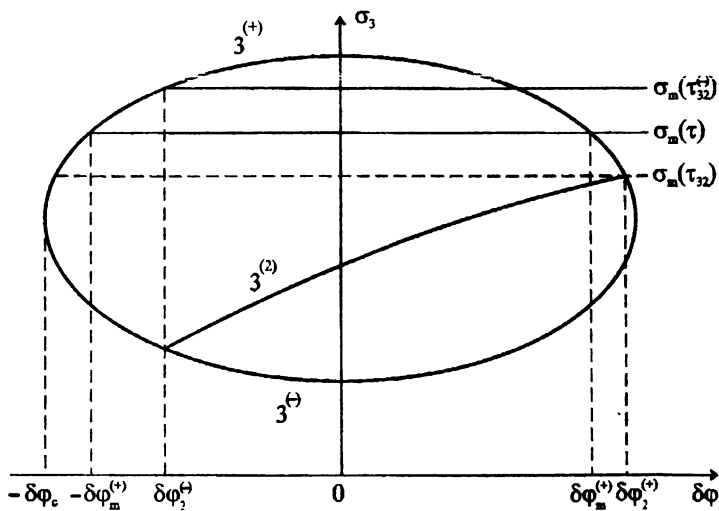


Рис. 5.5. Взаимное расположение кривых:  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \Phi_0, \delta\phi)$  – кривые  $3^{(\pm)}$ ,  $\sigma_3 = \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\phi)$  – кривая  $3^{(2)}$  и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$  при  $\Phi_0 \geq \Phi_3(1)$

Следует отметить, что значения корней, упомянутых выше, при  $\tau$  из интервала (5.26а) удовлетворяют неравенствам:

$$\begin{aligned} -\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) &< -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) , \\ \delta\varphi_m^{(2)}(H_3, \tau) \Big|_{\tau=1} &\leq \delta\varphi_m^{(2)}(H_3, \tau) \leq \delta\varphi_2^{(+)}(H_3, \Phi_0) . \end{aligned}$$

Расположим прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ , отвечающих значениям  $\tau$  из интервала (5.26б), относительно кривых, изображающих зависимость  $\sigma_3^{(\pm)}$ ,  $\sigma_3^{(2)}$  от  $\delta\varphi$  на плоскости  $(\delta\varphi, \sigma_3)$ , становится иным (см. рис. 5.5, б). Поэтому область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  при  $\tau$  из интервала (5.26б) определяется уже другими системами неравенств, а именно

$$\begin{cases} -\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi < -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) < \sigma_3 < \sigma_m(\tau) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(+)}(H_3, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) . \end{cases}$$

Из рис. 5.5, б легко видеть, что значение  $\tau = \tau_{32}^{(-)}$  выделено условием

$$-\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) = \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) ,$$

согласно которому

$$\sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \Big|_{\delta\varphi=\delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0)} = \sigma_m(\tau_{32}^{(-)}) .$$

Разрешая последнее равенство относительно  $\tau_{32}^{(-)}$ , найдем

$$\tau_{32}^{(-)} = 4 \left\{ \left\{ \left[ 2 / \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \right]^2 - 3 \right\}^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2} \Big|_{\delta\varphi=\delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0)} .$$

Значениям  $\tau$  из интервала (5.26в) на плоскости  $(\delta\varphi, \sigma_3)$  соответствуют прямые  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$ , которые (см. рис. 5.5, б) располагаются выше прямой  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau_{32}^{(-)})$ , поэтому области изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  при  $\tau$  из интервала (5.26в) определяются системами неравенств:

$$\begin{cases} -\delta\varphi_c(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta\varphi_2^{(-)}(H_3, \Phi_0) \leq \delta\varphi < -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) , \\ \delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi < \delta\varphi_2^{(+)}(H_3, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) < \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_3, \Phi_0, \delta\varphi) ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_m^{(+)}(H_3, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(2)}(H_3, \delta\varphi) < \sigma_3 < \sigma_m(\tau) . \end{cases}$$

Пусть  $H = H_4$ . Область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau$  в этом случае различается в зависимости от  $\Phi_0$ . Так, при  $\Phi_0 = 0$  имеем

$$\delta\varphi = 0, \quad \sigma_3 = \sin \alpha_4, \quad \tau_4 < \tau < \sqrt{2} ,$$

где  $\tau_4 \approx 1,2635807$  (см. неравенства (5.9)).

Если же

$$0 < \Phi_0 \leq \Phi_4(\sqrt{2}) = \Phi_4(\tau)|_{\tau=\sqrt{2}} ,$$

где  $\Phi_4(\tau)$  определяется формулой (5.11), то область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  задается (рис. 5.6, а) следующими системами неравенств:

• если  $\tau_4^{(-)} < \tau \leq \tau_{4C}$ , то

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(-)}(H_4, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi < \delta\varphi_m^{(-)}(H_4, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau) ; \end{cases} \quad (5.27)$$

• если  $\tau_{4C} < \tau \leq \tau_4^{(+)}$ , то

$$\begin{cases} -\delta\varphi_c(H_4, \Phi_0) \leq \delta\varphi < -\delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) , \\ \delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi \leq \delta\varphi_c(H_4, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) ; \end{cases} \quad (5.28a)$$

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_m(\tau) ; \end{cases} \quad (5.28б)$$

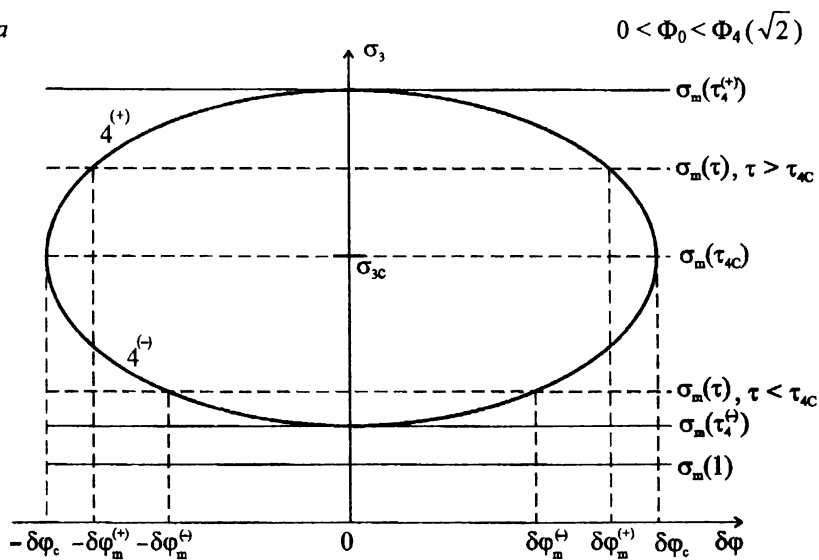
где  $\sigma_3^{(\pm)}$  и  $\delta\varphi_c$  определяются формулами (4.51а) и (4.71) при  $i = 4$ ;

$\delta\varphi_m^{(\pm)}$  – положительные корни уравнений:

$$\sigma_3^{(\pm)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) = \sigma_m(\tau) ;$$

$$\tau_4^{(\pm)} = 4 \left\{ [1 + 4 \operatorname{ctg}^2(\alpha_4 \pm \Phi_0)]^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2} ;$$

a



б

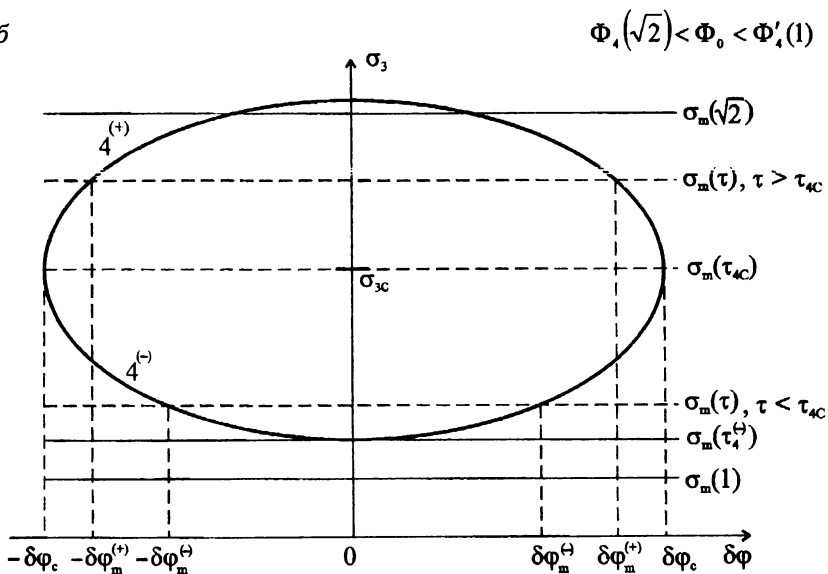


Рис. 5.6. Взаимное расположение кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(\pm)}(H_4, \Phi_0, \delta\phi)$  – кривые  $4^{(\pm)}$ , и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$

$$\tau_{4C} = 4 \left\{ \left[ 4 (1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha_4) \cos^2 \Phi_0 - 3 \right]^{1/2} - 1 \right\}^{-3/2}.$$

Значение  $\tau = \tau_{4C}$  выделено условием

$$\sigma_m(\tau_{4C}) = \sigma_{3C} = \sin \alpha_4 / \cos \Phi_0,$$

а выделенность значений  $\tau = \tau_4^{(z)}$  понятна из графиков на рис. 5.6.

Аналогичным образом (см. рис. 5.6, б) обстоит дело в случае углов  $\Phi_0$  из интервала

$$\Phi_4(\sqrt{2}) < \Phi_0 \leq \Phi'_4(1) = \Phi'_4(\tau) \Big|_{\tau=1},$$

а именно область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  определяется системой неравенств (5.27), если  $\tau_4^{(-)} < \tau \leq \tau_{4C}$  и системами неравенств (5.28), если  $\tau_{4C} < \tau < \sqrt{2}$ , где  $\Phi'_4(\tau)$  определяется формулой (5.10).

Наконец, при  $\Phi_0 > \Phi'_4(1)$  область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$  определяется (рис. 5.7):

• если  $1 \leq \tau \leq \tau_{4C}$ , системой неравенств:

$$\begin{cases} -\delta\varphi_m^{(-)}(H_4, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi < \delta\varphi_m(H_4, \Phi_0, \tau), \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau); \end{cases}$$

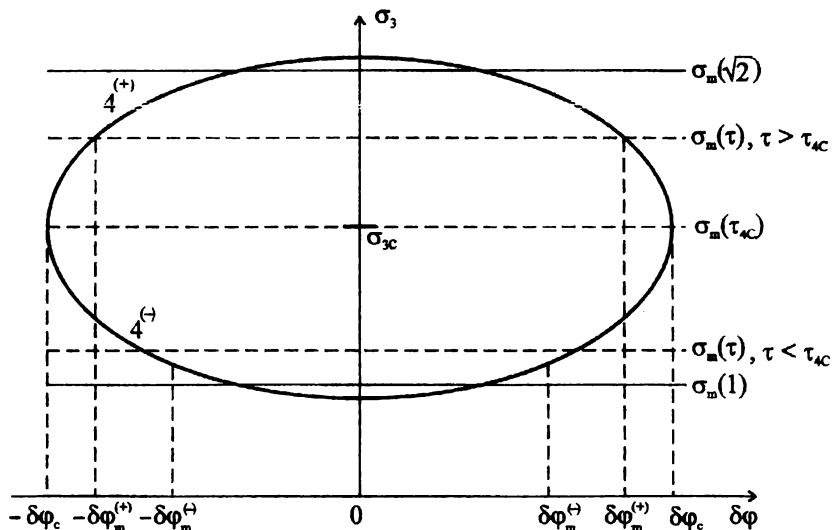


Рис. 5.7. Взаимное расположение кривых  $\sigma_3 = \sigma_3^{(z)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi)$  – кривые  $4^{(\pm)}$  и прямых  $\sigma_3 = \sigma_m(\tau)$  при  $\Phi_0 > \Phi'_4(1)$



• если  $\tau_{4C} < \tau < \sqrt{2}$ , системами:

$$\begin{cases} -\delta\varphi_c(H_4, \Phi_0) \leq \delta\varphi < -\delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) , \\ \delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) < \delta\varphi \leq \delta\varphi_c(H_4, \Phi_0) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 \leq \sigma_3^{(+)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) ; \\ \\ \begin{cases} -\delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) \leq \delta\varphi \leq \delta\varphi_m^{(+)}(H_4, \Phi_0, \tau) , \\ \sigma_3^{(-)}(H_4, \Phi_0, \delta\varphi) \leq \sigma_3 < \sigma_m(\tau) . \end{cases} \end{cases}$$

Итак, располагая формулами, выражающими явными образом зависимость тензора  $L$  от  $\eta$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau$ ,  $H_i$  и зная область изменения переменных  $\delta\varphi$ ,  $\sigma_3$ ,  $\tau$  для каждой из плоскостей (4.43), можно считать, что тензорные функции  $L = L(\eta, \delta\varphi, \sigma_3, \tau, H_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  заданы, и перейти к обсуждению ориентационного соответствия решеток  $\alpha$  и  $\gamma$ , связанных деформационным преобразованием (1.1).

#### 4. Ориентационное соответствие решеток $\alpha$ и $\gamma$

Обозначим через  $\{e_1^a, e_2^a, e_3^a\}$  правую тройку ортов, направленных в  $\alpha$ -решетке вдоль осей симметрии второго и четвертого порядков (см. рис. 1.2), и постулируем соответствие

$$(e_1^r - e_2^r)/\sqrt{2} \rightarrow e_1^a, \quad (e_1^r + e_2^r)/\sqrt{2} \rightarrow e_2^a, \quad e_3^r \rightarrow e_3^a \quad (5.29)$$

рассматривая  $\alpha$ -решетку как результат деформационного преобразования (1.1)  $\gamma$ -решетки при собственно деформации  $\gamma$ -решетки по Бейну с осью сжатия  $e_3^r$  (см. формулу (5.18)). Деформация Бейна не изменяет ориентацию направлений  $(e_1^r \pm e_2^r)/\sqrt{2}$ ,  $e_3^r$ , поэтому соответствие (5.29) будет выражаться равенствами:

$$e_k^a = \Omega[e_1^r + (-1)^k e_2^r]/\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \quad e_3^a = \Omega e_3^r, \quad (5.30)$$

где  $\Omega$  определяется формулой (5.19).

Переходя в (5.30) к базису, образованному тройкой ортов  $\{e_1^r, e_2^r, e_3^r\}$ , получим

$$e_k^a = \sum_{i=1}^3 (e_i^r, e_k^a) e_i^r, \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_\kappa') &= \{\lambda_1 [\lambda_1 + (-1)^\kappa \lambda_2] (1 - \cos \Psi) + \cos \Psi - (-1)^\kappa \lambda_3 \sin \Psi\} / \sqrt{2}, \\
(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_\kappa') &= \{\lambda_2 [\lambda_1 + (-1)^\kappa \lambda_2] (1 - \cos \Psi) + (-1)^\kappa \cos \Psi + \lambda_3 \sin \Psi\} / \sqrt{2}, \\
(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_\kappa') &= \{\lambda_3 [\lambda_1 + (-1)^\kappa \lambda_2] (1 - \cos \Psi) + [(-1)^\kappa \lambda_1 - \lambda_2] \sin \Psi\} / \sqrt{2}, \\
\kappa &= 1, 2, \\
(\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_3') &= \lambda_1 \lambda_3 (1 - \cos \Psi) - \lambda_2 \sin \Psi, \\
(\mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3') &= \lambda_2 \lambda_3 (1 - \cos \Psi) - \lambda_1 \sin \Psi, \\
(\mathbf{e}_3', \mathbf{e}_3') &= \lambda_3^2 (1 - \cos \Psi) + \cos \Psi
\end{aligned}$$

есть направляющие косинусы;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – компоненты вектора  $\lambda$  (см. формулу (5.20в)) в базисе  $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'\}$ ;  $\Psi$  выражается формулой (5.20а).

Формулы (5.31) определяют ориентацию кристаллографических осей  $\alpha$ -решетки относительно кристаллографических осей  $\gamma$ -решетки и устанавливают тем самым ориентационное соответствие между решетками  $\alpha$  и  $\gamma$ . Следует однако заметить, что ориентационная связь между решетками превращающихся  $\gamma$  и  $\alpha$  фаз задается обычно в виде так называемых ориентационных соотношений. В этих соотношениях указываются кристаллографические плоскость и направление в решетке  $\gamma$ -аустенита, параллельные (или почти параллельные) кристаллографической плоскости и направлению в решетке  $\alpha$ -мартенсита. Для  $\alpha$ -мартенсита массивных образцов сплавов железа характерны несколько вариантов ориентационных соотношений: Курдюмова – Закса, Нишиямы, Гренингера – Трояно, но в качестве плоскости  $\gamma$ -аустенита, входящей в ориентационные соотношения, все выделяют плотноупакованную плоскость  $\{111\}_\gamma$ , образующую минимальный угол с габитусной плоскостью кристалла  $\alpha$ -мартенсита.

Обозначим через  $\Pi_{0\gamma}$  плотноупакованную плоскость  $\gamma$ -решетки, образующую минимальный угол с заданной плоскостью  $H$  (см. формулы (4.3) и (4.18)), а через  $N_0$  – единичный вектор нормали к ней. В случае плоскостей  $H$  (4.43) будем иметь тогда

$$\Pi_{0\gamma} = (111)_\gamma, \quad N_0 = (\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2' + \mathbf{e}_3') / \sqrt{3}.$$

Деформационное преобразование (1.1) решетки  $\gamma$  в решетку  $\alpha$  изменяет как расположение узлов плоскости  $\Pi_{0\gamma}$  в расположение узлов, отвечающее плоскости  $\Pi_{0\alpha} = (0 \text{ } 1)_\alpha$  решетки  $\alpha$  (если соответствие между решет-

ками  $\alpha$  и  $\gamma$  задается равенствами (5.30)), так и ориентацию плоскости  $\Pi_{0\gamma}$ . Угол поворота последней измеряется углом между плоскостями  $\Pi_{0\gamma}$ ,  $\Pi_{0\alpha}$ :

$$\Psi_0 = \arccos(\mathbf{N}_0, \mathbf{n}_0) , \quad (5.32)$$

где  $\mathbf{n}_0$  – единичный вектор нормали к  $\Pi_{0\alpha}$ .

Векторы нормалей к плоскостям  $\Pi_{0\alpha}$  и  $\Pi_{0\gamma}$  связаны соотношением

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{N}_0 / |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0|$$

(см. формулу (2.11)), которое позволяет исключить  $\mathbf{n}_0$  в (5.32) и перейти к выражению

$$\Psi_0 = \arccos[(\mathbf{N}_0, \Omega \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0) / |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0|] , \quad (5.33)$$

используя равенство  $\mathbf{L}^{-1} = \Omega \mathbf{E}^{-1}$ , следующее из (1.9), где  $\Omega$  определяется формулой (5.19),

$$\mathbf{E}^{-1} = \sqrt{\frac{\tau^2 + (2 - \tau^2)\sigma_3^2}{2}} \left[ \mathbf{I} + \left( \frac{\sqrt{2}}{\tau} - 1 \right) \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_3' \right] ,$$

$$|\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0| = \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{(\tau^2 + 1)\sqrt{2[\tau^2 + (2 - \tau^2)\sigma_3^2]}}{3}} .$$

Замечая далее, что

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0 / |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0| = \sqrt{3/2} \sin \Psi_H \mathbf{e}_3' + [\cos \Psi_H - (\sqrt{2}/2) \sin \Psi_H] \mathbf{N}_0 , \quad (5.34)$$

где

$$\sin \Psi_H = (\sqrt{2} - \tau) / \sqrt{3(1 + \tau^2)} , \quad \cos \Psi_H = (1 + \tau\sqrt{2}) / \sqrt{3(1 + \tau^2)} , \quad (5.35)$$

и учитывая (5.19), будем иметь

$$\Psi_0 = \arccos(\cos \Psi_H \sec \delta \Psi) , \quad (5.36)$$

где

$$\sec \delta \Psi = 1 - (1/\sqrt{2}) \left\{ \sqrt{3} (\lambda, [\mathbf{N}_0, \mathbf{e}_3']) \operatorname{tg} \Psi_H \sin \Psi + (1 - \cos \Psi) [\sqrt{2} - (\sqrt{2} - \operatorname{tg} \Psi_H)(\lambda, \mathbf{N}_0)^2 - \sqrt{3} (\lambda, \mathbf{e}_3')(\lambda, \mathbf{N}_0) \operatorname{tg} \Psi_H] \right\} ,$$

или

$$\begin{aligned}
\sec \delta \Psi = & 1 - \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 - \cos \Psi) \left\{ 2\sqrt{2} + (1 - 3\Lambda) \operatorname{tg} \Psi_{\text{H}} - \right. \\
& - (4 + \sqrt{2} \operatorname{tg} \Psi_{\text{H}}) \sqrt{\Lambda(1 - \Lambda)} \sin \left( \beta + \delta \varphi + \eta \tilde{\beta} + \frac{\pi}{4} \right) - \\
& - (\sqrt{2} - \operatorname{tg} \Psi_{\text{H}})(1 - \Lambda) \sin \left[ 2(\beta + \delta \varphi + \eta \tilde{\beta}) \right] \left. \right\} - \\
& - \eta \sqrt{1 - \Lambda} \sin \Psi \operatorname{tg} \Psi_{\text{H}} \cos \left( \beta + \delta \varphi + \eta \tilde{\beta} + \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Под действием деформации Бейна плоскость  $\Pi_{0\gamma}$  поворачивается на угол  $\Psi_{\text{H}}$  вокруг оси  $\lambda_{\text{H}} = -(\mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2)/\sqrt{2}$  в направлении вращения часовой стрелки, если смотреть навстречу  $\lambda_{\text{H}}$ , поскольку

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0 / |\mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_0| = \Omega_{\text{H}}^* \mathbf{N}_0, \tag{5.38}$$

где  $\Omega_{\text{H}} = \mathbf{I} \cos \Psi_{\text{H}} + (1 - \cos \Psi_{\text{H}}) \lambda_{\text{H}} \cdot \lambda_{\text{H}} + \sin \Psi_{\text{H}} U_{\lambda_{\text{H}}}$  — так называемый поворот Нипшиа. Ортогональное преобразование  $\Omega$  компенсирует лишь отчасти этот поворот, поскольку плоскость  $\Pi_{0\gamma}$  ориентационно неизменной плоскостью, вообще говоря, не является. Степень компенсации характеризуется количественно значением угла  $\Psi_0$  и изменяется в зависимости от  $\beta$ ,  $\eta$ ,  $\delta \varphi$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_3$ . Характер этой зависимости иллюстрируется графиками, изображающими линии уровня (рис. 5.8. — 5.11)

$$\Psi_0(\beta, \eta, \delta \varphi, \tau, \sigma_3) \Big|_{\beta=\beta_i, \eta=-1, \delta \varphi=0} = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{5.39}$$

функции  $\Psi_0(\beta, \eta, \delta \varphi, \tau, \sigma_3)$  при фиксированных  $\beta$  (см. формулы (4.51в)),  $\eta$ ,  $\delta \varphi$ . Выбор таких значений  $\beta$  отвечает плоскостям (4.43), ориентационно близким к габитусным плоскостям  $\alpha$ -мартенсита. Выбор же значения  $\eta = -1$  объясняется тем, что ортогональное преобразование (5.19) при  $\eta = 1$  не обеспечивает компенсацию деформационного поворота (5.38) плоскости  $\Pi_{0\gamma}$ . Иными словами, ориентационная связь между плоскостями  $\Pi_{0\gamma}$  и  $\Pi_{0\alpha}$ , согласуется с представлениями о их ориентационной близости, если в формулах (5.19), (5.20в), (5.22), (5.23б), (5.23г), (5.23е), (5.25б) для составляющих тензора  $\mathbf{L}$ , отображающего решетку  $\gamma$  в решетку  $\alpha$ , положить  $\eta = -1$ .

Качественные и количественные различия в поведении линий уровня (5.39) обусловлены главным образом зависимостью от  $\beta$ , в силу заметных изменений  $\beta$  (от наименьшего, т. е.  $\beta = \beta_4 \approx 11,3^\circ$  для плоскости  $\text{H}_4$ , до наибольшего, т. е.  $\beta = \beta_3 \approx 35,6^\circ$  для плоскости  $\text{H}_3$ ). Общая тенденция здесь та-

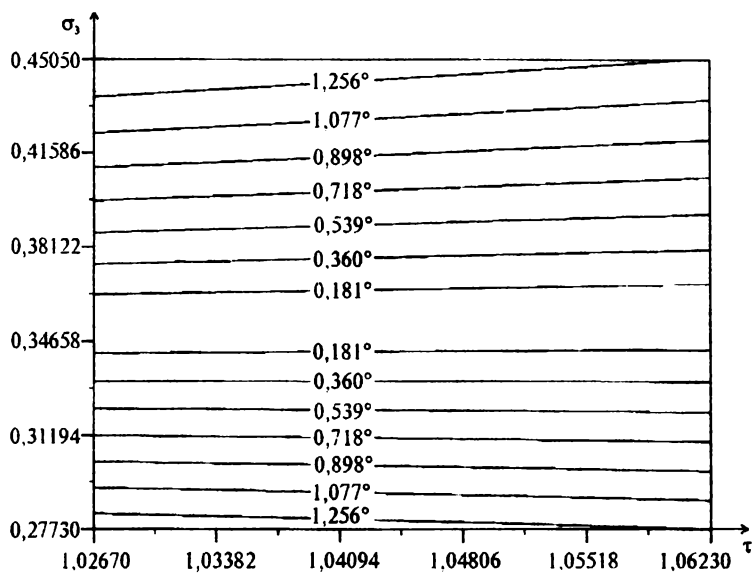


Рис. 5.8. Линии уровня функции  $\Psi_0(\beta_1, \eta, \delta\phi, \tau, \sigma_3)|_{\eta=-1, \delta\phi=0}$

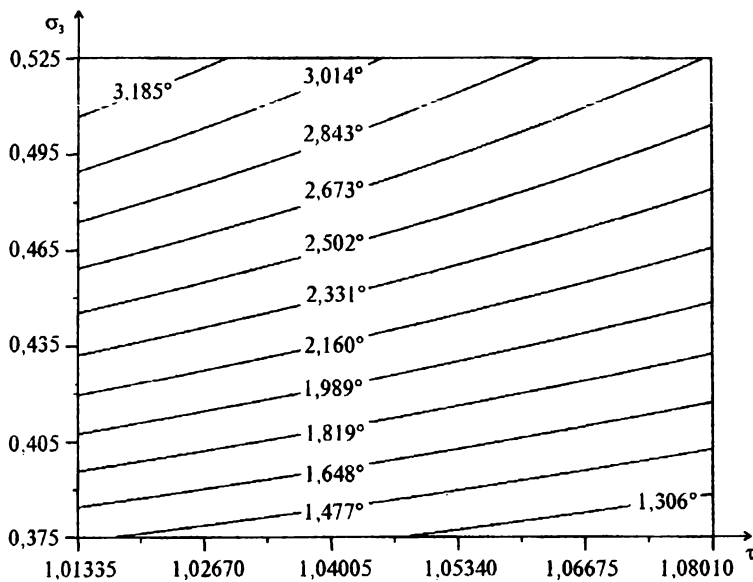


Рис. 5.9. Линии уровня функции  $\Psi_0(\beta_2, \eta, \delta\phi, \tau, \sigma_3)|_{\eta=-1, \delta\phi=0}$

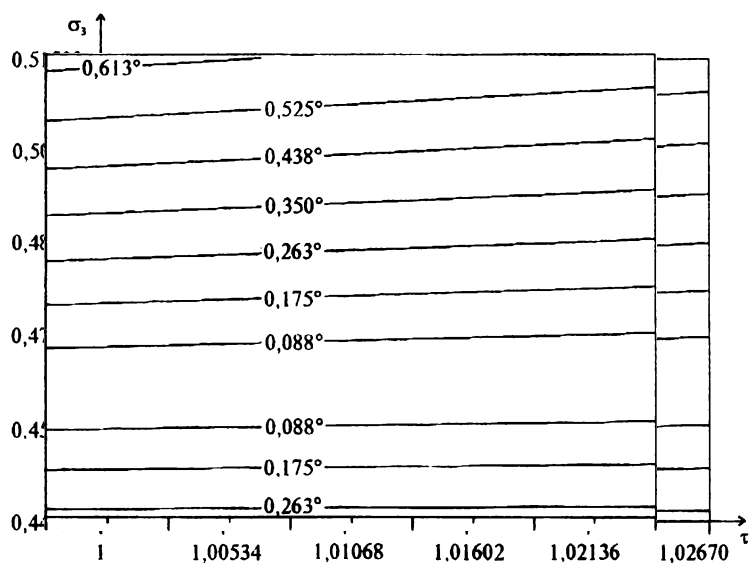


Рис. 5.10. Линии уровня функции  $\Psi_0(\beta_3, \eta, \delta\varphi, \tau, \sigma_3)|_{\eta=-1, \delta\varphi=0}$

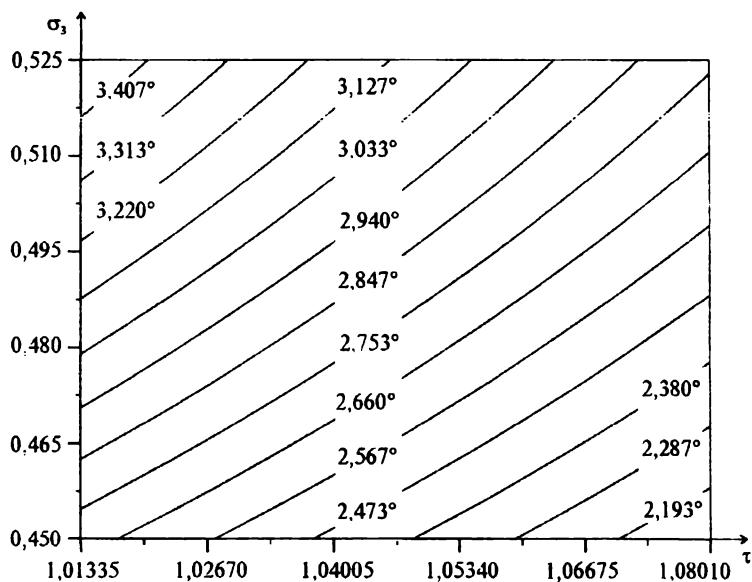


Рис. 5.11. Линии уровня функции  $\Psi_0(\beta_4, \eta, \delta\varphi, \tau, \sigma_3)|_{\eta=-1, \delta\varphi=0}$

кова: рост  $\beta$  сопровождается убыванием  $\Psi_0$ , поэтому увеличение  $\beta$  за счет аддитивной добавки  $\delta\phi > 0$  (см. формулу (5.37)) несколько уменьшает значение  $\Psi_0$ .

### Заключительные замечания

Формулы (5.3) устанавливают связь между параметрами  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_3$ , а формулы (5.12) – (5.17) указывают на возможность варьирования значений параметра  $\kappa$  в определенных пределах при заданных плоскости  $H = H_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  и значении угла  $\Phi_0$ , выделяющем семейство  $\{P_3(H_i)\}$  ориентационно эквивалентных<sup>1</sup> плоскостей  $P_3(H_i)$ . Параметры  $\kappa$ ,  $\tau$ ,  $\sigma_3$  относятся к величинам, вычисляемым на основе независимых наблюдений, что позволяет использовать формулы (5.3), (5.12) – (5.17) для экспериментальной проверки развиваемых теоретических представлений.

Немаловажное значение в этом плане имеют и результаты наблюдений ориентационного соответствия между решетками превращающихся  $\gamma$  и  $\alpha$  фаз, в частности, угла  $\Psi_0 = \Pi_{0\gamma} \wedge \Pi_{0\alpha}$  между плоскостями с максимальной плотностью упаковки атомов, который можно представить и как функцию параметров  $\kappa$ ,  $\tau$  (см. формулы (5.19), (3.48) – (3.51), (5.34), (5.35)), и как функцию параметров  $\tau$ ,  $\sigma_3$  (см. формулы (5.36), (5.37), (5.35)). Формулы эти определяют  $\Psi_0$  однозначно при заданной ориентации (см. формулу (4.68)) плоскости  $P_3(H_i)$  и  $\eta = -1$ , поскольку выбор конкретной плоскости из семейства плоскостей  $\{P_3(H_i)\}$  и значения  $\eta$  однозначно определяет ортогональное преобразование  $\Omega$  (см., например, формулы (5.19), (5.20)).

Задача об однородном деформационном преобразовании решетки в решетку допускает решение (см. формулы (5.18) – (5.25)) без изучения дополнительной деформации (деформации при инвариантной решетке (см. формулы (2.50), (2.52))), если набор параметров, характеризующих решетки превращающихся фаз, расширить за счет угловых характеристик, наблюдаемых в эксперименте. Базовым признаком может служить либо ориентация габитусной плоскости  $\alpha$ -мартенсита, либо взаимная ориентация плоскостей с максимальной плотностью упаковки атомов, связанных деформационным преобразованием. Процедура учета таких характеристик

---

<sup>1</sup> Имеются в виду плоскости  $P_3(H_i)$ , образующие с плоскостью  $H_i$  углы, не превышающие  $\Phi_0$ .

детально обсуждается в двух последних главах на конкретных примерах с использованием габитусной плоскости в качестве базового признака. Распространение ее на другие признаки (если это плоскости) в принципиальном отношении не содержит ничего нового.



## Заключение

Результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что сформулированные Г. В. Курдюмовым представления о геометрической картине атомных смещений, свойственной мартенситному механизму превращения, и представления о деформации кристаллической решетки при мартенситном превращении, вытекающие из фундаментальной работы А. Б. Гренингера и А. Р. Трояно [30], являются основополагающими в логической схеме  $\gamma - \alpha$  мартенситного превращения.

Определение мартенситного механизма превращения, предложенное Г. В. Курдюмовым, устанавливает связь между решетками превращающихся фаз, которая математически выражается уравнениями (1.12) в предположении об однородности деформационного преобразования, что позволяет строго решить задачу о построении симметричной части преобразования, ответственной за собственно деформацию одной решетки в другую. Экстремальные геометрические принципы – принцип минимальной деформации или принцип максимальной близости решеток – не играют здесь ключевой роли, хотя и полезны для понимания геометрического смысла вкладов от симметричной и ортогональной составляющих преобразования.

Так, принцип максимальной близости решеток указывает на выделенность тех вариантов деформационного преобразования решеток и тех вариантов ориентационного соответствия между ними, которые заведомо определяются взаимным расположением узлов в каждой из решеток в отдельности и описываются симметричными тензорами.

Все другие варианты ориентационного соответствия решеток следует объяснять, исходя из принципов, имеющих уже физическое обоснование.

В качестве одного из таких принципов принимается принцип наименьшего проигрыша в энергии упругих напряжений, который согласуется с выводами А. Б. Гренингера и А. Р. Трояно [30] и допускает геометрическую формулировку в виде постулата о деформации с инвариантной плоскостью, что существенно расширяет возможности геометрического подхода к изучению кристаллографии мартенситного превращения.

Реализация этих возможностей требует математического инструментария, отвечающего содержанию идей А. Б. Гренингера и А. Р. Трояно. Эти идеи геометрически наглядно выражаются в рамках формализма, основанного на понятиях ориентационных инвариантов деформационного преобразования и преобразования размерности инвариантных подпространств. Использование его позволяет простым образом связать строение решеток превращающихся фаз с собственными значениями и ин-

вариантными подпространствами, характерными для тензора, отображающего одну решетку в другую, указать ограничения на параметры ортогональной составляющей деформационного преобразования, установить зависимость между размерностью инвариантных подпространств, собственно деформацией решетки и дополнительной деформацией (деформацией при инвариантной решетке в общепринятой терминологии), преобразующей одномерное инвариантное подпространство – ориентационно неизменную плоскость в двухмерное – инвариантную плоскость. В результате задачи о построении составляющих деформационного преобразования с инвариантной плоскостью расцепляются и каждая из них разрешается в явном виде.

Найденные решения определяют ортогональное преобразование, ориентацию инвариантной плоскости и дополнительную деформацию как функции независимых параметров, причем дополнительная деформация однородна и односдвиговой, вообще говоря, не является. Элемент произвола, связанный с выбором значений этих параметров, возможно и неустраним, если придерживаться только принятых геометрических принципов, так как нет оснований ожидать, что мартенситный механизм превращения определяется всецело расположением узлов в решетках превращающихся фаз, поэтому вопрос о замыкании уравнений для составляющих однородного деформационного преобразования решеток требует дальнейших исследований.

Предметом дальнейших исследований может служить и обобщение подхода на случай неоднородного деформационного преобразования решеток, в том числе и на случай неоднородной дополнительной деформации, отличной от деформации при инвариантной решетке. Интересные возможности в этом плане открываются при изучении преобразования инвариантных подпространств в отсутствии вырождения собственных значений тензора  $L$ , но при условиях  $L_1 L_2 = 1$ ,  $L_3 = |E| \neq 1$ , совместимых с существованием метрических инвариантов (расстояния и площади) в ориентационно неизменной плоскости, соответствующей собственному значению  $L_3$ .

В заключение считаем своим долгом выразить признательность первому проректору В. Н. Ларионову и проректору по научной работе В. А. Федорову, а также заведующему кафедрой высшей математики Л. С. Чебыкину за внимание и административную поддержку.

Особую благодарность хотелось бы выразить заведующему кафедрой теоретической физики и прикладной математики УГТУ-УПИ В. Г. Мазуренко за постоянную поддержку, обсуждение результатов работы и плодотворное сотрудничество в разработке направлений дальнейшего исследования.

### Библиографический список

1. Курдюмов Г. В., Утевский Л. М., Энтин Р. И. Превращения в железе и стали. – М.: Наука, 1977. – 238 с.
2. Курдюмов Г. В. Явления закалки и отпуска стали. – М.: Metallurgizdat, 1960. – 64 с.
3. Уманский Я. С., Скаков Ю. А. Физика металлов. – М.: Атомиздат, 1978. – 352 с.
4. Лысак А. И., Николин Б. И. Физические основы термической обработки стали. – Киев: Техника, 1975. – 304 с.
5. Закалка стали в магнитном поле / М. А. Кривоглаз, В. Д. Садовский, Л. В. Смирнов и др. – М.: Наука, 1977. – 120 с.
6. Петров Ю. Н. Дефекты и бездиффузионное превращение в стали. – Киев: Наук. думка, 1978. – 262с.
7. Бернштейн М. Л., Займовский В. А., Капуткина Л. М. Термомеханическая обработка стали. – М.: Metallurgiya, 1983. – 480 с.
8. Кащенко М. П. Волновая модель роста мартенсита при  $\gamma \rightarrow \alpha$  превращении в сплавах железа. – Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993. – 224 с.
9. Пушин В. Г., Кондратьев В. В., Хачин В. Н. Предпереходные явления и мартенситные превращения. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 1998. – 368 с.
10. Ройтбурд А. Л. Современное состояние теории мартенситных превращений // Несовершенства кристаллического строения и мартенситные превращения. – М.: Наука, 1972. – С. 7 – 32.
11. Ройтбурд А. Л., Эстрин Э. П. Мартенситные превращения // Итоги науки и техники. Metallovedenie i termicheskaya obrabotka. – М.: ВИНТИ, 1970. – С. 5 – 102.
12. Roytburd A. L. Martensitic transformation as a typical phase transformation in solids // Solid states physics: advances in research and application. – N. Y.: Acad. Press, 1978. – V. 33. – P. 317 – 390.
13. Винтайкин Е. З. Мартенситные превращения // Итоги науки и техники. Metallovedenie i termicheskaya obrabotka. – М.: ВИНТИ, 1983. – С. 3 – 63.
14. Кондратьев В. В., Пушин В. Г. Предмартенситные состояния в металлах, сплавах и их соединениях: экспериментальные результаты, модели структуры, классификация // Физика металлов и metallovedenie. – 1985. – Т. 60, № 4. – С. 629 – 650.

15. *Кристиан Дж. У.* Фазовые превращения // Физическое металловедение. – М.: Мир, 1968. – Вып. 2. – С. 227 – 346.
16. *Bain E. G.* The nature of Martensite // Trans. Metall. Soc. AIME. – 1924. – V. 70. – P. 25 – 46.
17. *Изюмов Ю. А., Сыромятников В. Н.* Фазовые переходы и симметрия кристаллов. – М.: Наука, 1984. – 248 с.
18. *Вакс В. Г.* Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. – М.: Наука, 1973. – 328 с.
19. *Блинц Р., Жэки Б.* Сегнетоэлектрики и антисегнетоэлектрики. – М.: Мир, 1975. – 400 с.
20. *Гинзбург В. Л.* Теория сегнетоэлектрических явлений // Успехи физ. наук. – 1949. – Т. 38, № 4. – С. 490 – 512.
21. *Cochran W.* Crystal stability and the theory of ferroelectricity // Advances Phys. – 1960. – V. 9, № 36. – P. 387 – 423.
22. *Андерсон П. В.* Физика диэлектриков. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 290 с.
23. *Теодосиу К.* Упругие модели дефектов в кристаллах. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
24. *Верещагин В. П., Кащенко С. М.* Отбор дислокационных центров зарождения кристаллов мартенсита с габитусами, близкими к {hhl}, в сплавах железа // Физика твердого тела. – 1989. – Т. 31, № 5. – С. 287 – 289.
25. *Верещагин В. П., Кащенко М. П.* Упругая модель дислокационного центра зарождения мартенсита // Металловедение и терм. обработка металлов. – 1994. – № 7. – С. 5 – 11.
26. *Верещагин В. П., Кащенко М. П.* Моделирование процесса управления ростом мартенситного кристалла с учетом специфики его гетерогенного зарождения // Металлы. – 1995. – № 5. – С. 125 – 134.
27. *Верещагин В. П., Нефедов А. В.* Взаимная ориентация и свойства близости решеток  $\alpha$ ,  $\gamma$  в случаях совершенного и несовершенного  $\gamma$  аустенита / Ред. журн. «Изв. высш. учеб. заведений». Сер. Физика. – Томск, 1998. – 41 с. – Деп. ВИНТИ 26.08.98, № 167 – В98.
28. *Верещагин В. П., Кащенко М. П.* Мера близости кристаллических решеток // Журн. техн. физики. – 1999. – Т. 69, вып. 5. – С. 60 – 64.
29. *Nishiyama Z., Shimizu K., Sugino K.* // Acta Met. – 1961. – V. 9, P. 620 – 622.
30. *Greninger A. B., Troiano A. R.* The mechanism of martensite formation // Trans. Metall. Soc. AIME. – 1949. – V. 185. – P. 590 – 597.

31. *Wechsler M. S., Lieberman D. S., Read T. A.* // Trans. Metall. Soc. AIME. – 1953. – V. 197. – P. 1503 .
32. *Bowles J. S., Mackenzie J. K.* // Acta Met. – 1954. – V. 2. – P. 129; P. 138; P. 224.
33. *Вережагин В. П., Горелов Е. Н.* Описание перестройки решетки при мартенситном  $\gamma \rightarrow \alpha$  превращении в сплавах железа в представлении ориентационно неизменных плоскостей // Эволюция дефектных структур в конденсированных средах: Тез. докл. конф., 19 – 23 нояб. 2001 г. / Под ред. М. Д. Старостенкова; Алтайский гос. техн. ун-т им. И. И. Ползунова. – Барнаул, 2001. – С. 184 – 185.
34. *Gu N. J.* The different habit planes of ferrous martensites. // Proc. Int. Conf. Martensite Transform. – Japan: Institute of Metals, 1986. – P. 325 – 330.
35. *Кащенко М. П., Вережагин В. П.* Решетки совпадающих узлов  $\gamma$  и  $\alpha$  фаз в модели жестких атомных сфер // Физические свойства металлов и сплавов: Межвуз. сб. – Екатеринбург: Изд-во УПИ им. С. М. Кирова, 1992. – Вып. 7. – С. 13 – 20.

Верещагин Владимир Пантелеевич  
Горелов Евгений Николаевич

**Геометрическое обоснование моделей однородного  
деформационного преобразования кристаллических решеток,  
допускающего инвариантную плоскость**

Редактор Л.И. Кузнецова

Печатается по постановлению  
редакционно-издательского совета университета

---

Подписано в печать 18. 06. 03. Формат 60х84/16. Бумага для множ.аппа-  
ратов. Усл.-печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 100 экз. Заказ № 29  
Издательство Российского государственного профессионально-педаго-  
гического университета. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.  
Ризограф РГТПУ. Екатеринбург, ул. Машиностроителей, 11.

---

